Lösningar till duggan i kursen Analys och linjär algebra del A TMV036a.

1. Bestäm kritiska och singulära punkter, lokala och absoluta (om de finns) maximum och minimum av funktionen $f(x)$ definierad på hela reella linjen. Bestäm de intervall där funktionen är växande och avtagane. Skissa grafen. (beräkna inte andra derivatan på den uppgiften!)

   Variant I.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sqrt[3]{x}\right)\exp(-x^2+x) \\ \frac{d}{dx}\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)\exp(-x^2+x)\right) &= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{x}e^{x-x^2}+x\sqrt[3]{x}e^{x-x^2}-2x^2\sqrt[3]{x}e^{x-x^2}\right) = \\ &\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-2/3}\left(6x^2-3x-1\right)\left(e^{x-x^2}\right) \end{aligned}$$

   Origo är en singulär punkt, eftersom derivatan är odefinierad där.

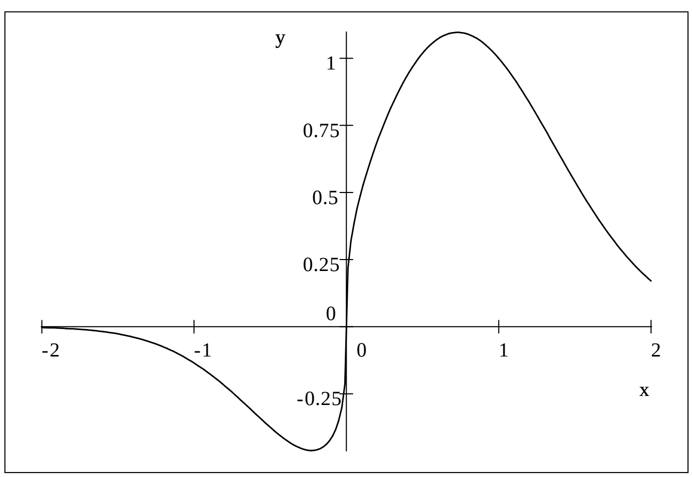
   $\lim_{x\to 0+} f'(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0-} f'(x) = \infty$, det gör att grafen har vertikal tangent i origo.

   Kritiska punkter är rötter till polynomet $6x^2-3x-1=0$: $x_{1,2}= \frac{1}{4} \pm \frac{1}{12}\sqrt{33}$, eftersom $e^{x-x^2} > 0$.

   f är växande på $\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\sqrt{33}, \frac{1}{4}+\frac{1}{12}\sqrt{33}\right)$ och är avtagande på $\left(-\infty, \frac{1}{4}-\frac{1}{12}\sqrt{33}\right)$ och $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\sqrt{33}, \infty\right)$.

   f har ett globalt minimum i $\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\sqrt{33}$och har ett globalt maximum i $\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\sqrt{33}$ eftersom

   $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.



Variant II

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right)\exp(-x^2+x) \\
\frac{d}{dx}\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\exp(-x^2+x)\right) &= \frac{1}{x}\left(\frac{2}{3}\sqrt[3]{x}^2 e^{x-x^2} + x\sqrt[3]{x}^2 e^{x-x^2} - 2x^2\sqrt[3]{x}^2 e^{x-x^2}\right) = \\
&\left(-\frac{1}{3}\right) x^{-1/3}\left(6x^2-3x-2\right)\left(e^{x-x^2}\right)
\end{aligned}$$

Origo är en singulär punkt, eftersom derivatan är odefinierad där. f har ett globalt minumum i den punkten $f(0) = 0$ eftersom $f(x) > 0$ i alla andra punkter.

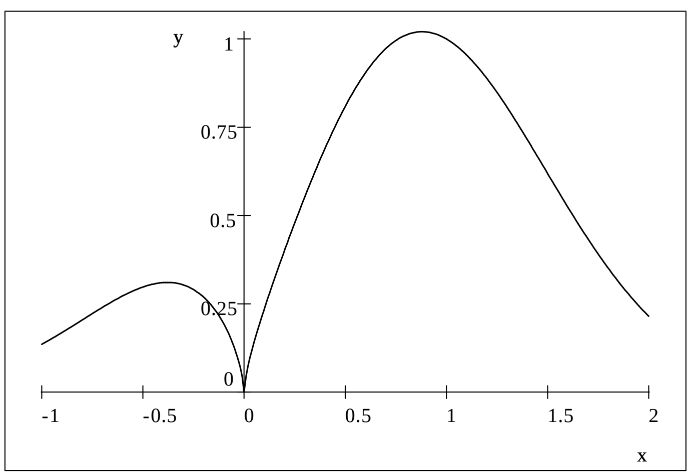
$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0-} f'(x) = -\infty$, det gör att grafen har ingen tangent i origo.

Kritiska punkter är rötter till polynomet $6x^2-3x-2 = 0$, kritiska punkter:

$$\begin{matrix} \frac{1}{12}\sqrt{57}+\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{12}\sqrt{57} \end{matrix}.$$

f har lokala maxima i båda punkter enligt första derivatans test eftersom f är växande på $\left(-\infty, \frac{1}{4}-\frac{1}{12}\sqrt{57}\right)$ och $\left(0, \frac{1}{4}+\frac{1}{12}\sqrt{57}\right)$ och är avtagande på $\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\sqrt{57}, 0\right)$ och på $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\sqrt{57}, \infty\right)$.

f har faktiskt ett globalt maximum i punkten $\left(0, \frac{1}{4}+\frac{1}{12}\sqrt{57}\right)$ men det är svårt att beräkna på pappret.



2. Variant I

   Använd medelvärdessatsen för att visa att $\ln(1+x) < x$ för alla $x > 0$.

   Betrakta funktionen $g(x) = \ln(1+x) - x$.

$g(0) = 0$, $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 < 0$ för alla $x > 0$. Enligt medelvärdessatsen finns $c \in (0, x)$ sådant att

$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(c) < 0$, d.v.s. $\ln(1+x) - x < 0$ för alla $x > 0$. Detta medför att $\ln(1 + x) < x$.

Variant II

Använd medelvärdessatsen för att visa att $\arctan(x) < x$ för alla $x > 0$.

Betrakta funktionen $g(x) = \arctan(x) - x$.

$g(0) = 0$, $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 < 0$ för alla $x > 0$. Enligt medelvärdessatsen finns $c \in (0, x)$ sådant att

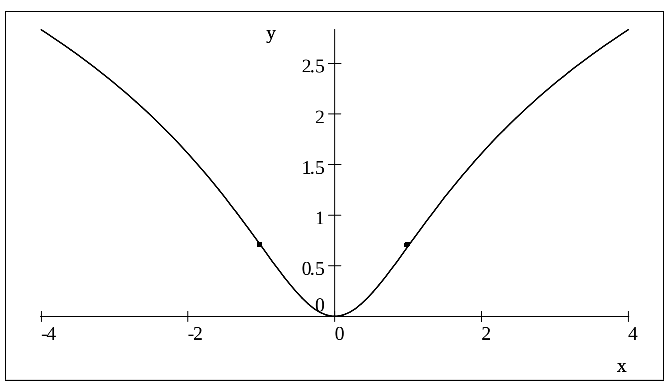
$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(c) < 0$, d.v.s. $\arctan(x) - x < 0$ för alla $x > 0$. Detta medför att $\arctan(x) < x$.

3. Bestäm böjningspunkter och de intervall där funktionen är konkav uppåt och där den är konkav neråt.

Variant I

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+x^2) \\
\frac{d}{dx}\left(\ln(1+x^2)\right) &= 2\frac{x}{x^2+1} \\
\frac{d^2}{dx^2}\left(\ln(1+x^2)\right) &= \frac{2}{x^2+1} - 4\frac{x^2}{(x^2+1)^2} = (-2)\left(x^2+1\right)^{-2}(x+1)(x-1)
\end{aligned}$$

Böjningspunkter är: $x = \pm 1$. Funktionen är konkav uppåt på $(-1, 1,)$ och konkav neråt på $(-\infty, -1)$ och $(1, \infty)$ .Böjningspunkterna är markerade på grafen:



Variant II

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a}{x}\ln\left(\frac{x}{a}\right),\ a>0\\
\frac{d}{dx}\left(\frac{a}{x}\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right) &= \frac{a}{x^2}-\frac{a}{x^2}\ln\frac{1}{a}x = x^{-2}\left(1-\ln\frac{1}{a}x\right)a\\
\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{a}{x}\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right) &= 2\frac{a}{x^3}\ln\left(\frac{1}{a}x\right)-3\frac{a}{x^3} = x^{-3}\left(2\ln\left(\frac{1}{a}x\right)-3\right)a
\end{aligned}$$

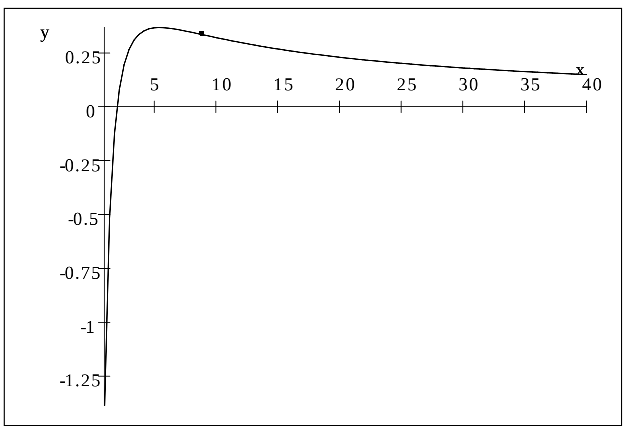
Funktionen är definierad bara för $x>0$. Endast böjningspunkt är lösning till ekvationen: $2\ln\left(\frac{1}{a}x\right)-3=0$.

$\ln\left(\frac{1}{a}x\right)=3/2 \implies \frac{1}{a}x=e^{3/2} \implies x=ae^{3/2}$.

Detta medför att funktionen är konkav neråt på $(0,ae^{3/2})$, och konkav uppåt på $(ae^{3/2},\infty)$.

ln är en växande funktionen och $f''(x)<0$ på första intervallet och $f''(x)>0$ på andra intervallet.

Exempel på grafen för $a=2$ med $f(x)=\frac{2}{x}\ln\left(\frac{x}{2}\right)$ .Böjningspunkt är $x=2e^{3/2}=x=8.9634$ är markerad på grafen:



4. Beräkna gränsvärdenallet

Variant I

$$\lim_{x\to3}\left(\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}\right)=\lim_{x\to3}\left(\frac{\left(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)}{(x^2-9)\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)}\right)=\lim_{x\to3}\left(\frac{(-3)(x-3)}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)}\right)=$$

$$\lim_{x\to3}\left(\frac{(-3)}{(x+3)\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)}\right)=\left(\frac{(-3)}{(6)\left(\sqrt{16}+2\sqrt{4}\right)}\right)=\left(\frac{(-1)}{(2)(4+4)}\right)=-\frac{1}{16}$$

Variant II

$$\lim_{x\to4}\left(\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}\right)=\lim_{x\to4}\left(\frac{\left(\sqrt{1+2x}-3\right)\left(\sqrt{1+2x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{1+2x}+3\right)}\right)=\lim_{x\to4}\left(\frac{2(x-4)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{1+2x}+3\right)}\right)=$$

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{2\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{1+2x}+3\right)}\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{2\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{1+2x}+3\right)}\right)=\left(\frac{2(2+2)}{\left(\sqrt{9}+3\right)}\right)=\left(\frac{2(2+2)}{(3+3)}\right)=\frac{4}{3}$$