Lösningsförslag extradugga 11 oktober 2013

Version I

Uppgift 1 *Bestäm definitionsmängd, kritiska och singulära punkter, lokala och absoluta (om de finns) maxima och minima av funktionen $f(x)$. Bestäm de intervall där funktinen är växande och avtagande. Skissa grafen.*

$$f(x) = \frac{x}{1+x}e^{-x}$$

Lösning:

$$f'(x) = \frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}e^{-x} + \frac{x}{1+x}e^{-x} = e^{-x}\left(\frac{1-x-x^2}{(1+x)^2}\right)$$

1. $f(x) = 0$:
   dåå[1] $x = 0$
2. $f'(x) = 0$:
   då $x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$
3. Vertikala asymptoter: f (och f') är odefinierade då $x = -1$. Alltså är $x = -1$ en vertikal asymptot.
4. Horisontella asymptoter:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{1+1/x}e^{-x} \to 0$$

[1] utläses: då och endast då

ty $e^{-x} \to 0$ och exponentialfunktionen vinner alltid över polynom. Alltså är $y = 0$ en horisontell asymptot då $x \to \infty$.

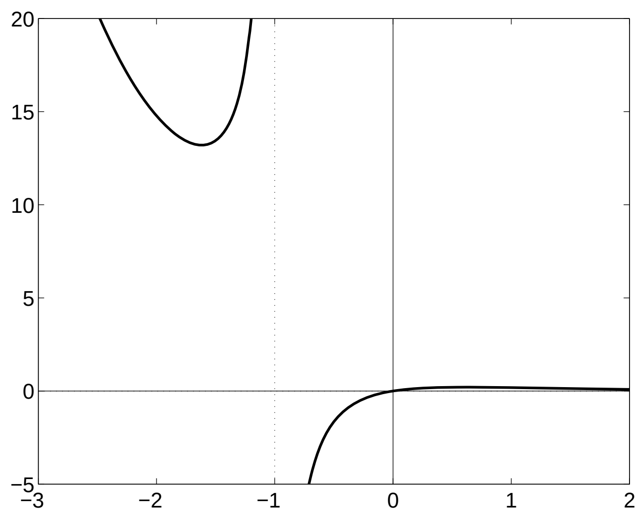
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{x}{x+1} e^{-x} \to \infty$$

Det finns alltså ingen asymptot då $x \to -\infty$.

5. Tabell

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$		-1		0		$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$	∞
f		$\searrow$		$\nearrow$	¦	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$
f'		$-$	0	$+$	¦	$+$	0	$+$	0	$-$

6. Skissa graf:



Definitionsmängden är alla x. Lokalt minimum i $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$, lokalt maximum i $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$. Dessa är *inte* globala eftersom funktionen antar hur stora (∞) och hur små ($-\infty$) tal som helst.

Uppgift 2 *Använd medelvärdessatsen för att visa att* $\ln(1+x) < \frac{1}{0.2}(1+x)^{0.2} - \frac{1}{0.2}$ *för alla* $x > 0$.

Lösning

Låt

$$f(x) = \ln(1+x)$$
$$g(x) = \frac{1}{0.2}(1+x)^{0.2} - \frac{1}{0.2}$$

Då gäller att $f(0) = g(0) = 0$. Speciellt har vi att $f(0) - g(0) = 0$

För derivatorna gäller att

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$
$$g'(x) = \frac{1}{(1+x)^{0.8}}$$

eller att[2] $f'(x) < g'(x)$ vilket också kan skrivas som $f'(x) - g'(x) = \frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) < 0$.

Vi vill visa att $f(x) < g(x)$ eller att $f(x) - g(x) < 0$. Vi adderar $f(0) - g(0) = 0$ och dividerar med det positiva talet $x = x - 0$ och får att

$$\frac{\Big(f(x) - g(x)\Big) - \Big(f(0) - g(0)\Big)}{x - 0} = \frac{d}{dx}\Big(f(x) - g(x)\Big)\Big|_{x=c} < 0 \tag{0.1}$$

där det sista steget följer enligt ovan. Därmed är påståendet visat.

[2]eftersom $1 + x > (1+x)^{0.8}$ då $x > 0$

Uppgift 3 *Bestäm alla böjningspunkter och de intervall där funktionen är konkav uppåt och där den är konkav nedåt.*

$$f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$$

Lösning

$$f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 96x$$
$$f''(x) = 12x^2 - 72x + 96 = 12(x^2 - 6x + 8)$$

$$f''(x) = 0 \text{ då } x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1$$

x	$\smile$	2	$\frown$	4	$\smile$
f”	+	0	$-$	0	+

Funktionen är alltså konkav nedåt i intervallet $(2, 4)$ och konkav uppåt på intervallet $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$

Uppgift 4 *Beräkna gränsvärdet*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$$

Lösning

Förläng med konjugatet

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-2x-1)-(x^2-7x+3)}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{5x-4}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{x(5-4/x)}{|x|(\sqrt{1-2/x-1/x^2}+\sqrt{1-7/x+3/x^2}}
\end{aligned}$$

men eftersom $x>0$ så $|x|=x$. Dessutom $\lim\limits_{x\to\infty}1/x=0$ så

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(5-4/x)}{(\sqrt{1-2/x-1/x^2}+\sqrt{1-7/x+3/x^2}}=\frac{5}{2}$$

Version II

Uppgift 1 *Bestäm definitionsmängd, kritiska och singulära punkter, lokala och absoluta (om de finns) maxima och minima av funktionen $f(x)$. Bestäm de intervall där funktinen är växande och avtagande. Skissa grafen.*

$$f(x) = (x^2 - 4x + 1)e^{-x}$$

Lösning:

$$f'(x) = (2x-4)e^{-x} - (x^2 - 4x + 1) = e^{-x}\left(-x^2 + 6x - 5\right)$$

1. $f(x) = 0$:
   då $x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$
2. $f'(x) = 0$:
   då $x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = 3 \pm \sqrt{9-5} \pm = 3 \pm 2$ alltså $x_1 = 1$ och $x_2 = 5$
3. Vertikala asymptoter: f är definierad för alla x
4. Horisontella asymptoter:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = (x^2 - 4x + 1)e^{-x} \to 0$$

   ty $e^{-x} \to 0$ och exponentialfunktionen vinner alltid över polynom. Alltså är $y = 0$ en horisontell asymptot då $x \to \infty$.

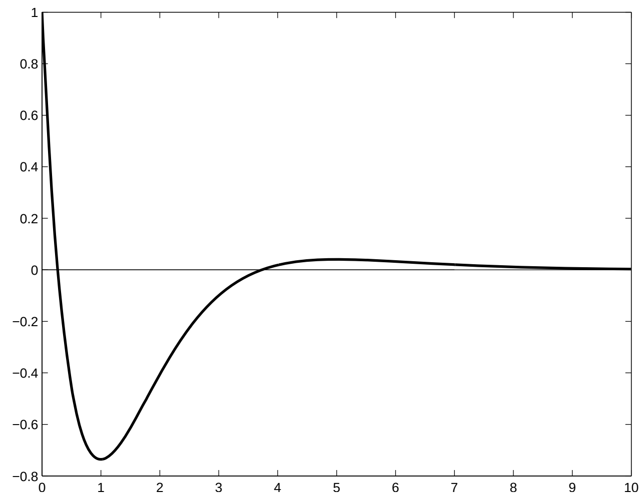
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (x^2 - 4x + 1)e^{-x} \to \infty$$

   ty $e^{-x} \to \infty$. Det finns alltså ingen asymptot då $x \to -\infty$.

5. Tabell

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		1		$2+\sqrt{3}$		5		∞
f		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	
f'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

6. Skissa graf:



Definitionsmängden är alla x. Lokalt minimum i $x = 1$, lokalt maximum i $x = 5$. Den första av dessa ($x = 1$) är ett globalt minimum men den andra ($x = 5$) är *inte* det eftersom funktionen antar hur stora (∞) värde som helst då $x \to -\infty$.

Uppgift 2 *Använd medelvärdessatsen för att visa att* $\frac{x}{1+x} < \arctan(x)$ *för alla* $x > 0$.

Lösning

Låt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{1+x} \\ g(x) &= \arctan(x) \end{aligned}$$

Då gäller att $f(0) = g(0) = 0$. Speciellt har vi att $f(0) - g(0) = 0$

För derivatorna gäller att

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(1+x)^2} \\ g'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

eller att[3] $f'(x) < g'(x)$ vilket också kan skrivas som $f'(x) - g'(x) = \frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) < 0$.

Vi vill visa att $f(x) < g(x)$ eller att $f(x) - g(x) < 0$. Vi adderar $f(0) - g(0) = 0$ och dividerar med det positiva talet $x = x - 0$ och får att

$$\frac{\Big(f(x) - g(x)\Big) - \Big(f(0) - g(0)\Big)}{x - 0} = \frac{d}{dx}\Big(f(x) - g(x)\Big)\Big|_{x=c} < 0$$

där det sista steget följer enligt ovan. Därmed är påståendet visat.

[3]eftersom $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + x^2$ då $x > 0$

Uppgift 3 *Bestäm alla böjningspunkter och de intervall där funktionen är konkav uppåt och där den är konkav nedåt.*

$$f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$$

Lösning

$$f'(x) = 15x^4 - 20x^3 + 3$$
$$f''(x) = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x-1)$$

$$f''(x) = 0 \text{ då } x = 0 \text{ (dubbelrot) och då } x = 1$$

x	$\frown$	0	$\frown$	1	$\smile$
f"	$-$	0	$-$	0	$+$

Funktionen är alltså konkav nedåt i intervallet $(-\infty, 1)\backslash 0$[4] och konkav uppåt på intervallet $(1, \infty)$.

[4] intervallet $(-\infty, 1)$ dock ej punkten 0, andraderivatan är ju 0 där

Uppgift 4 *Beräkna gränsvärdet*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x-a)(x+b)}-x\right)$$

Lösning

Förläng med konjugatet

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x-a)(x+b)}-x\right)\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-a)(x+b)+x^2}{\sqrt{(x-a)(x+c)}+x}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-ax+bx-ab-x^2}{\sqrt{(x-a)(x+c)}+x}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{x(b-a)-ab}{|x|\sqrt{1+(b-a)/x-ab/x^2}+x}
\end{aligned}$$

men eftersom $x>0$ så $|x|=x$. Dessutom $\lim\limits_{x\to\infty} 1/x=0$ så

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(b-a)-ab/x}{\sqrt{1+(b-a)/x-ab/x^2}+1}=\frac{b-a}{2}$$