MATEMATIK
Chalmers
A.Heintz

Datum: 2008-01-17
Hjälpmedel: inga

Tid: efterrmiddag

Lösningar till tentan i TMV035 Analys och linjär algebra K/Bt/Kf, del A.

1. **Sats.** Ange definitionen på inversafunktionen. Formulera och bevisa formeln för derivatan av inversafunktionen. (4p)

   Låt f vara en funktion som verkar från mängden D_f till mängden R. En funktion g som verkar från mängden R till mängden Df kallas inversa funktion till funktionen f om för varje y ur R och för varje x ur D_f följande ekvationer gäller:

$$f(g(y)) = y; \quad g(f(x)) = x.$$

   För funktionen g i det fallet användes betäckningen f^{-1}.

   Derivatan av inversa funktionen uppfyller ekvationen:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

   för argument y och x sådana att $y = f(x)$.

   Man kan bevisa detta med att derivera med avseende på x andra likheten i definitionen ovan. Kedjeregeln medför att

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = x' = 1$$

   d.v.s. att $[(f^{-1})'(y)] \cdot f'(x) = 1$. Sista likheten medför att $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

2. **Gränsvärde.** Beräkna gränsvärdet:

   $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt[3]{x-b} - \sqrt[3]{a-b}}{x-a}$, där $a > b$. (4p)

   Problemet löses med att multiplicera och dela funktionen med konjugat till täljaren. Vi använder likheten

$$u^3 - w^3 = (u - v)(u^2 + uw + w^2)$$

   I vårt fall användes den likheten med $u = \sqrt[3]{x-b}$ och $w = \sqrt[3]{a-b}$. Konjugat till $\sqrt[3]{x-b} - \sqrt[3]{a-b}$ är

$$(x-b)^{2/3} + (x-b)^{1/3}(a-b)^{1/3} + (a-b)^{2/3}.$$

   Detta medför att

$$\frac{\sqrt[3]{x-b} - \sqrt[3]{a-b}}{x-a} =$$
$$\frac{(x-b)-(a-b)}{(x-a)\left[(x-b)^{2/3} + (x-b)^{1/3}(a-b)^{1/3} + (a-b)^{2/3}\right]} =$$
$$\frac{x-a}{(x-a)\left[(x-b)^{2/3} + (x-b)^{1/3}(a-b)^{1/3} + (a-b)^{2/3}\right]} =$$
$$\frac{1}{\left[(x-b)^{2/3} + (x-b)^{1/3}(a-b)^{1/3} + (a-b)^{2/3}\right]} \underset{x\to a}{\Longrightarrow} \frac{1}{3(a-b)^{2/3}}$$

3. **Kontinuitet.** Formulera definitionen på funktion kontinuerlig i en punkt. Ange om någon av givna funktioner f och g, båda odefinierade i punkt $x = 0$, kan utvidgas till punkten $x = 0$ (d.v.s. definieras i punkten $x = 0$) så att dem blir kontinuerliga i den punkten. I fall det är möjligt ange hur man kan göra det.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(1/x); -\pi/2 < x < \pi/2,\ x \neq 0, \\ g(x) &= \frac{\sin(x)}{x}; -\pi/2 < x < \pi/2,\ x \neq 0. \end{aligned}$$

(4p)

En funktion är kontinuerlig i punkt a i fall $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Funktionen $f(x) = \sin(1/x)$ saknar gränsvärde då $x \to 0$ eftersom oavsett hur nära noll blir x antar funktionen f värdena -1 och $+1$ för vissa x, nämnligen för $x = \frac{1}{\pi/2+2\pi n}$ och $x = \frac{1}{3\pi/2+2\pi n}$, där n - är hela tal. På det viset f kan inte närma sig något gränsvärde då $x \to 0$. Det gör att funktionen f inte kan definieras i punkten noll så att den blir kontinuerlig.

Funktionen $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ har gränsvärde 1 då $x \to 0$. Det är ett standart gränsvärde och kan visas med hjälp av Taylors utveckling för $\sin(x)$ runt $x = 0$ som är: $\sin(x) = x + O(x^3)$ då $x \to 0$. Man ser härifrån att $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. All detta gör att om vi definierar funktionen $g(0) = 1$ så blir den kontinuerlig i noll. I övriga punkter är funktionen kontinuerlig eftersom den ¨r kvot av tvåkontinuerliga funktioner och $x \neq 0$ utanfor noll.

4. **Derivering.** Beräkna derivatan till funktionen

$$f(x) = \frac{\sqrt{\sin(x)}}{\ln(x) - \arctan(x)}.$$ (4p)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{\sin(x)}}{\ln(x) - \arctan(x)}\right) =$$

$$\frac{(2x\sin x - 2\sin x + x\ln x\cos x - x\cos x\arctan x - 2x^2\sin x + x^3\ln x\cos x - x^3\cos x\arctan x)}{2\left(\sin^{\frac{1}{2}} x\right)(x + x^3)(\ln x - \arctan x)^2}$$

5. **Extrempunkter.** Bestäm alla lokala extrempunkter och absolut maximum och absolut minimum (om de existerar) till följande funktion:

$g(x) = 4x^3 - 12x^2 + 3x^4$.

definierad för alla reella tal x. Motivera svaret!

$g'(x) = \frac{d}{dx}(4x^3 - 12x^2 + 3x^4) = 12x^2 - 24x + 12x^3 = 12x(x+2)(x-1)$.

Stationära punkter till g är $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$.

$g''(x) = \frac{d^2}{dx^2}(4x^3 - 12x^2 + 3x^4) = 24x + 36x^2 - 24 = 12(2x + 3x^2 - 2)$.

$g''(x_1) = -24 < 0$; $g''(x_2) = 12 \cdot 6 = 72 > 0$; $g''(x_3) = 36 > 0$.

Därför har g ett lokalt maximum $g(0) = 0$ i punkten x_1, ett lokalt minimum $g(-2) = 4(-2)^3 - 12(-2)^2 + 3(-2)^4 = -32$ i punkten x_2, och ett lokalt minimum

$g(1) = 4(1)^3 - 12(1)^2 + 3(1)^4 = -5$ i punkten x_3.

Derivatan av g är negativ för $x < -2$, och är positiv $x > 1$. Det gör att $g(x)$ växer oändligt då x växer från $x = 1$ till $+\infty$ och när x går från $x = -1$ mot -∞.

Därför har $g(x)$ inget globalt maximum. Globalt minimum antas i en av två lokala minimipunkter nämligen i $x_1 = -2$ där $g(-2) = -32$. (4p)

6. **Taylors polynom.** Ange Taylors polynom av ordning 3 runt punkten $a = \frac{\pi}{6}$ för funktionen: $f(x) = \sin^2(x)$ med felterm på allmän form. (4p)

$\frac{d}{dx}\left(\sin^2(x)\right) = \sin 2x|_{x=\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{d^2}{dx^2}\left(\sin^2(x)\right) = 2\cos 2x|_{x=\pi/6} = 1$; $\frac{d^3}{dx^3}\left(\sin^2(x)\right) = -4\sin 2x|_{x=\pi/6} = -2\sqrt{3}$.

$\sin^2(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(-\frac{1}{6}\pi + x\right)^1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\pi + x\right)^2 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\left(-\frac{1}{6}\pi + x\right)^3 + O\left(\left(-\frac{1}{6}\pi + x\right)^4\right)$

7. **Plan i rummet.** Två punkter A och B är givna av sina koordinater: A: $(+1, +3, -2)$ och B: $(+7, -4, +4)$. Ange en ekvation på planet genom punkten B så att planet är vinkelrät mot vektorn $\overrightarrow{AB}$. (4p)

$\overrightarrow{AB} = (+1, +3, -2) - (+7, -4, +4) = (-6, 7, -6)$.

Ekvationen för ett plan genom punkt $\overrightarrow{r_0}$ med koordinater (x_0, y_0, z_0) och med normal (N_x, N_y, N_z) är: $(x - x_0)N_x + (y - y_0)N_y + (z - z_0)N_z = 0$ eller $\left(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0\right) \cdot \overrightarrow{N} = 0$ på vektor form. I vårt problem $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{AB}$. Ekvationen för sökta planet blir: $6(x - 7) - 7(y + 4) + 6(z - 4) = 0$.

8. **Linjer i rummet och projektioner av vektorer.** Bestäm minimalt avstånd mellan linjen med parametrisk ekvation på vektorform: $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{q} + \overrightarrow{l}\, t$, och punkten P med koordinater (P_x, P_y, P_z). Förklara geometrisk mening av vektorer $\overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{l}$. Använd lämpliga beteckningar för komponenter hos vektorer $\overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{l}$ eller använd vektorbeteckningar för att formulera svaret. (4p)

$\overrightarrow{r}$ i linjens ekvation är löpande punkt på linjen, $\overrightarrow{q}$ är en fixerad punkt på linjen, $\overrightarrow{l}$ är en riktningsvektor parallell med linjen, t är en tidsliknande parameter längs linjen.

Man kan tolka ekvationen som framställning av ortsvektorn $\overrightarrow{r}$ för en punkt som förfluttar sig med en konstant hastighet $\overrightarrow{l}$ och befinner sig i punkten $\overrightarrow{q}$ vid tiden noll.

Om vi beteknar med Q projektionen av punkten P på linjen, så utgör P, Q, och q en rätvinklig triangel PQq med rätvinkel vid punkten Q.

Avståndet från P till linjen är lika med längden $|PQ|$.

Pythagorsatsen ger att $|PQ|^2 = |Pq|^2 - |Qq|^2$ eftersom Pq är hypotenus och PQ och Qq är kateter i triangeln PQq.

$\overrightarrow{Qq}$ är projektion av vektorn $\overrightarrow{Pq}$ =på $\overrightarrow{l}$. Den kan beröknas med hjälp v skalär produkt : $\overrightarrow{Qq} = \left(\frac{\overrightarrow{Pq} \cdot \overrightarrow{l}}{\left|\overrightarrow{l}\right|^2}\right)\overrightarrow{l}$. Detta medför att:

$|Qq| = \frac{\left|\overrightarrow{Pq} \cdot \overrightarrow{l}\right|}{\left|\overrightarrow{l}\right|}$; $|Pq|^2 = \left|\overrightarrow{P} - \overrightarrow{q}\right|^2$.

Vi får då svaret på vektor form:

$$|PQ|^2 = \left|\overrightarrow{P} - \overrightarrow{q}\right|^2 - \frac{\left|\overrightarrow{Pq} \cdot \overrightarrow{l}\right|^2}{\left|\overrightarrow{l}\right|^2}$$

,

eller

$$|PQ| = \sqrt{\left|\overrightarrow{P} - \overrightarrow{q}\right|^2 - \frac{\left|\overrightarrow{Pq} \cdot \overrightarrow{l}\right|^2}{\left|\overrightarrow{l}\right|^2}} = \frac{\sqrt{\left|\overrightarrow{P} - \overrightarrow{q}\right|^2 \left|\overrightarrow{l}\right|^2 - \left|\overrightarrow{Pq} \cdot \overrightarrow{l}\right|^2}}{\left|\overrightarrow{l}\right|}$$

I fall punkterna P, q, och vektorn $\overrightarrow{l}$ är givna av sina koordinater P_x, P_y, P_z o.s.v, kan uttrycket på vektorform ersättas med ett uttryck med koordinater:

$$|PQ| = \frac{\sqrt{\left[(P_x - q_x)^2 + (P_y - q_y)^2 + (P_z - q_z)^2\right]\left[l_x^2 + l_y^2 + l_z^2\right] - \left[(P_x - q_x)\, l_x + (P_y - q_y)\, l_y + (P_z - q_z)\, l_z\right]^2}}{\sqrt{\left[l_x^2 + l_y^2 + l_z^2\right]}}$$

Maxpoäng: 32 ; **3:** 16; **4:** 22; **5:** 26