MATEMATIK	Datum: 2009-10-22	Tid: förmiddag
Chalmers	Hjälpmedel: inga	
A.Heintz	Telefonvakt:	Tel.: 0762-721861

Lösningar till tenta TMV036/TMV035 Analys och linjär algebra K/Bt/Kf, del A.

1. **Sats** Ange "geometriska" beviset till gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \sin(x)/x$. (4p)

2. **Gränsvärde och kontinuitet.** 1) Ange definition för funktion kontinuerlig i en inre punkt på definitionsintervall.

   2) Betrakta följande funktion:

$$f(x) = \begin{cases} (\cos(x))^{\frac{1}{x}}, & \text{för } x \neq 0 \text{ och } -0.5 \leq x \leq 0.5 \\ 1, & \text{för } x = 0 \end{cases}$$

   Bestäm om f är kontinuerlig i origo eller inte och ange ett fullständigt bevis varför. (4p)

   Lösning. För att bestämma om funktionen är kontinuerlig i origo, måste man först beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} f(x)$.

$$\lim_{x\to 0} (\cos(x))^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{\ln(\cos(x))}{x}\right) \overset{lHopitals\_regel}{=} \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\right) = \exp(0) = 1.$$

   Detta medför att funktuionen är kontinuerlig i origo eftersom $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$.

3. **Derivering.** Beräkna derivatan av funktionen $f(x) = \dfrac{\arctan\left(\sqrt{1+x^2}\right)}{\arcsin\left(x^2\right)}$ (4p)

   Lösning.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\arctan\left(\sqrt{1+x^2}\right)}{\arcsin\left(x^2\right)}\right) = \frac{x}{(\arcsin x^2)\sqrt{x^2+1}\,(x^2+2)} - \frac{2x\arctan\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(\arcsin^2 x^2\right)\sqrt{1-x^4}}$$

4. **Tillämpning av derivator.** Betrakta funktionen :

$$g(x) = \begin{cases} x - 1 + \sin(2x)\,, & \text{för } 0 \le x \le \pi/2 \\ \sin(2x) - 1, & \text{för } -\pi/2 \le x < 0 \end{cases}$$

definierad på intervallet $[-\pi/2,\ \pi/2]$. Bestäm alla singulära punkter, lokala extrempunkter, absolut maximum och absolut minimum på det intervallet (om de existerar). (4p)

Bestäm böjningspunkter (inflection points), och de intervall där funktionen är konkav uppåt och konkav neråt. Rita en skiss av grafen till funktionen. (2p)

Lösning. Funktionen är kontinuerlig i punkten $x = 0$ eftersom vänster och höger gränsvärden i den punkten båda är lika med -1. Vi vet ännu inte om det finns derivata i den punkten.

Vi beräknar derivator av funktionen utanför $x = 0$.

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx}(x - 1 + \sin(2x)) = 2\cos(2x) + 1, & \text{för } 0 < x \le \pi/2 \\ \frac{d}{dx}(\sin(2x) - 1) = 2\cos(2x), & \text{för } -\pi/2 \le x < 0 \end{cases}$$

Vi ser att vänster derivatan i punkten $x = 0$ är lika med $2\cos(2x)|_{x=0} = 2$ och höger derivata är lika med

$(2\cos(2x)+1)|_{x=0} = 3$. Det visar att derivatan finns inte i den punkten och att $x = 0$ är en singulär punkt för g. Det är inte lokal extrempunkt eftersom derivatan är positiv på båda sidor av den punkten, funktionen växer både för $x < 0$ och $x > 0$ för x nära origo.

Från våra beräkningar är det lätt att stationära punkter till g blir rötter till ekvationer: $\cos(2x)$ för $-\pi/2 \le x < 0$ och till ekvationen $2\cos(2x) + 1 = 0$ eller $\cos(2x) = -\frac{1}{2}$ för $0 \le x \le \pi/2$. Det ger första stationära punkten $x_1 = -\pi/4$ i första fallet. I andra fallet $2x = \frac{2}{3}\pi$ och andra stationära punkten blir $x_2 = \pi/3$.

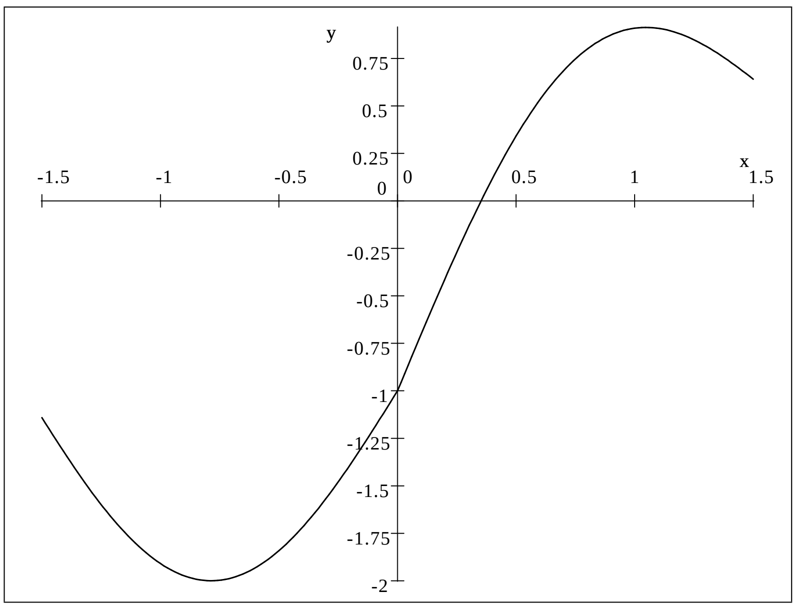
Andra derivatan av funktionen är:

$$g''(x) = \begin{matrix} \frac{d^2}{dx^2}(x - 1 + \sin(2x)) = -4\sin 2x, & \text{för } 0 < x \le \pi/2 \\ \frac{d^2}{dx^2}(\sin(2x) - 1) = -4\sin 2x, & \text{för } -\pi/2 \le x < 0 \end{matrix}$$

Vi ser att $g''(x_1) = g''(-\pi/4) = 4\frac{1}{\sqrt{2}} > 0$; $g''(x_2) = g''(\pi/3) = -4\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$. Detta medför efter andra derivatans test att g har ett lokalt minimum i $x_1 = -\pi/4$, $g(-\pi/4) = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)$och ett lokalt maximum i $x_2 = \pi/3$, $g(x_2) = \pi/3 - 1 + \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \pi/3 - 1 + \frac{1}{2}$. Randpunkterna är också lokala extrempunkter till funktionen: g har lokalt minumum i $x = \pi/2$ och lokalt maximum i $x = -\pi/2$. Vi jämför värden av g i dessa punkter med värden av funktionen i punkterna x_1 och x_2 så observerar att g har absolut minimum i x_1 och absolut maximum i x_2.

Vi ovserverar också att $g''(x) > 0$ för $-\pi/2 < x < 0$, $g''(x) < 0$ för $0 < x < \pi/2$.

Det betyder att funktionen g är konkav uppåt för $-\pi/2 < x < 0$ och g är konkav neråt for $0 < x < \pi/2$. Grafen till g är:



5. **Taylors polynom.** Ange Taylors polynom av grad 2 runt punkten $a = 1$ med felterm på Lagranges form för funktionen:

$f(x) = \sqrt{x}$. Uppskatta feltermen i fall $x = 1.1$. (4p)

Lösning.

$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$; $\frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt{x}\right) = -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}\Big|_{x=1} = \frac{-1}{4}$; $\frac{d^3}{dx^3}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{3}{8x^{\frac{5}{2}}}$

Allmän form på Taylors polynom är:

$f(x) = f(a) + f'(a)(x-1) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(s)(x-a)^3$

där $E(x) = \frac{1}{6}f^{(3)}(s)(x-a)^3$ är felterm på Lagranges form och s ligger mellan 1 och x. För givna funktionen

$f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{4}\right)(x-1)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{8}s^{-\frac{5}{2}}\right)(x-1)^3 =$

$1+\frac{1}{2}(x-1)-\left(\frac{1}{8}\right)(x-1)^2+\left(\frac{1}{16}s^{-\frac{5}{2}}\right)(x-1)^3$

Feltermen för $1 \leq s \leq 1.1$ är:

$E(1.1)=\left(\frac{1}{16}s^{-\frac{5}{2}}\right)(1.1-1)^3 \leq \left.\left(\frac{1}{16}s^{-\frac{5}{2}}\right)(1.1-1)^3\right|_{s=1}=\left(\frac{1}{16}\right)(0.1)^3=$
$0.0625\cdot 10^{-3}=0.0000625$. Alltså $E(1.1)\leq 0.0000625$.

6. **Gränsvärde.** Beräkna gränsvärdet:

   $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\tan(x)}{1-\cos(2x)}\right)$ (4p)

   Du får använda l'Hôpitals regel eller Taylors polynom.

   Lösning. Taylors polynom för tan och cos medför att $\tan(x)=x+O(x^2), x\to 0$. $\cos(x)=1-\frac{1}{2}x^2+O(x^3), x\to 0$.

   $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\tan(x)}{1-\cos(2x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\left(x+O(x^2)\right)}{1-\left(1-\frac{1}{2}(2x)^2+O(x^3)\right)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(x^2+O(x^3)\right)}{2x^2+O(x^3)}\right)=$
   $\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+O(x))}{2+O(x)}\right)=\frac{1}{2}$

7. **Geometri i rummet.** Bestäm avståndet mellan punkten med koordinater $(1,-2,3)$ och planet med ekvationen $2x-3y+4z-6=0$. Bestäm också om punkten med koordinater $(10,5,3)$ ligger på samma sida planet som första punkten. (4p)

   Lösning. Avståndet mellan punkten med koordinater (P_x,P_y,P_z) och planet med ekvationen $Ax+By+Cz-D=0$ beräknas enligt formeln:

$$\begin{aligned} s &= \left|\frac{AP_x+BP_y+CP_z-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|=\left|\frac{2\cdot 1-3\cdot(-2)+4\cdot 3-6}{\sqrt{4+9+16}}\right| \\ &= \left|\frac{2+6+12-6}{\sqrt{29}}\right|=\left|\frac{14}{\sqrt{29}}\right| \end{aligned}$$

   Om vi skriver om ekvationen för planet på formen $Ax+By+Cz-D=A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ och samma på vektor form $\overrightarrow{N}\cdot(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}_0)=0$ så är det lätt att observera att uttrycket $\overrightarrow{N}\cdot\left(\overrightarrow{P}-\overrightarrow{r}_0\right)$ är skalär produkten av normalen $\overrightarrow{N}$ till planet och vektorn mellan punkten r_0 på planet och punkten P. Den skalära produkten har olika tecken: plus eller minus, för punkter $\overrightarrow{P}$ som ligger "ovanför" och "under" planet. Lägg märke till att uttrycket $AP_x+BP_y+CP_z-D$ är negativt för första punkten: $AP_x + BP_y + CP_z - D = 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 - 6 = 14 > 0$.

Liknande uttryck för andra punkten är positivt: $2 \cdot (10) - 3 \cdot (5) + 4 \cdot (3) - 6 = 20 - 15 + 12 - 6 = 11 > 0$. Detta medför att punkterna ligger på samma sida planet $2x - 3y + 4z - 6 = 0$.

8. **Geometri i rummet.** Ange en ekvation för planet som går genom tre punkter med givna koordinater: $B(3;0;5)$, $C(1,1,0)$, $D(4,1,2)$. (4p)

   Svar: $-2x + 11y + 3z - 9 = 0$.

   Lösning. Planet definieras av en punkt och normalvektorn. Som punkt på planes kan vi ta en av givna punkter,

   till exempel $C(1,1,0)$.

   Normalen till planet måste vara vinkelrät mot vektorer mellan punkterna till exempel: $\overrightarrow{CB}$ och $\overrightarrow{DC}$ eftersom de är parallella till planet. Normal till planet kan beräknas då som vektorprodukt $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CD}$.

   $$\overrightarrow{CB} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \overrightarrow{DC} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{DC} = \det \begin{bmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = -2\overrightarrow{e_x} + 11\overrightarrow{e_y} + 3\overrightarrow{e_z} = \begin{bmatrix} -2 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix}$$

   Ekvationen för planet blir: $-2(x-1) + 11(y-1) + 3z = 0$ om vi väljer punkten $C(1,1,0)$ för att skriva ner ekvationen. Vi får förenkla ekvationen som $-2x + 11y + 3z - 9 = 0$.

   Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättats, ta sedan den som känns vara näst lättast o.s.v.

Maxpoäng: 34 ; **3:** 17; **4:** 22; **5:** 27