MATEMATIK	Datum: 2011-10-20	Tid: förmiddag
Chalmers	Hjälpmedel: inga	
A.Heintz	Telefonvakt: Richard Lärkäng,	Tel.: 0703-088304

Lösningar till tenta i TMV036/TMV035 Analys och linjär algebra K/Bt/Kf, del A.

1. **Sats.** Formulera och bevisa formeln för felet av linjär approximation till en funktion $f(x)$ nära punkt $x = a$. Se Adams sid.. (6p)

2. **Gränsvärde och kontinuitet.** 1) Ange definition för gränsvärde av en funktion $f(x)$ för $x \to +\infty$.

   2) Betrakta följande funktion: $f(x) = (x-1)\sin\left(\frac{\pi}{(x-1)}\right)$.

   Bestäm gränsvärden av $f(x)$ om de existerar för $x \to 1$ och för $x \to +\infty$. (6p)

   $$\lim_{x\to 1}(x-1)\sin\left(\frac{\pi}{(x-1)}\right) = 0$$

   Det följer från instängningssatsen (satsen om två polismännen) eftersom $\left|(x-1)\sin\left(\frac{\pi}{(x-1)}\right)\right| \leq |(x-1)|$ där $\lim_{x\to 1}|(x-1)| = 0$.

   $$\lim_{x\to+\infty}(x-1)\sin\left(\frac{\pi}{(x-1)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\pi\frac{1}{\left(\frac{\pi}{(x-1)}\right)}\sin\left(\frac{\pi}{(x-1)}\right) = \pi\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{\pi}{(x-1)}\right)}\sin\left(\frac{\pi}{(x-1)}\right) = \pi\cdot 1 = \pi$$

3. **Derivering.** Beräkna derivatan av funktionen

   $$f(x) = a\sin\left(\frac{\sin^2(x)}{1+\cos^2(x)}\right),$$

   där $a$sin betyder inversa funktonen till sin. (4p)

   $$\frac{\sin^2(x)}{1+\cos^2(x)} = \frac{(1-\cos 2x)}{\cos 2x + 3}.$$

   $$\frac{d}{dx}\left(\frac{(1-\cos 2x)}{\cos 2x+3}\right) = \frac{2\sin 2x\,(\cos 2x+3) - (1-\cos 2x)\,(-2\sin 2x)}{(\cos 2x+3)^2} =$$

   $$\frac{2\sin 2x\,(\cos 2x+3) + (1-\cos 2x)\,(2\sin 2x)}{(\cos 2x+3)^2} = \frac{8\sin 2x}{(\cos 2x+3)^2}.$$

   $$\frac{d}{dx}\left(\arcsin\left(\frac{\sin^2(x)}{1+\cos^2(x)}\right)\right) = \frac{d}{dx}\left(\arcsin\left(\frac{(1-\cos 2x)}{\cos 2x+3}\right)\right) =$$

   $$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{(1-\cos 2x)}{\cos 2x+3}\right)^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{(1-\cos 2x)}{\cos 2x+3}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{(1-\cos 2x)}{\cos 2x+3}\right)^2}}\frac{8\sin 2x}{(\cos 2x+3)^2}$$

4. **Tillämpning av derivator.** Betrakta funktionen : $g(x) = \sqrt[3]{x}\exp(-x^2)$ definierad för alla reella tal.

   a) Bestäm singulära punkter, lokala extrempunkter, absolut maximum och absolut minimum om de finns. (6p)

b) Bestäm böjningspunkter (inflection points), och de intervall där funktionen är växande, avtagande, konkav uppåt och konkav neråt. Rita en skiss av grafen till funktionen. (4p)

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x}\exp(-x^2)\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{x}e^{-x^2} - 2x^2\sqrt[3]{x}e^{-x^2}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(6x^2-1\right)\left(\sqrt[3]{x}\right)^{-2}\left(e^{-x^2}\right)$$

$$g''(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt[3]{x}\exp(-x^2)\right) = \frac{d}{dx}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-1}\left(6x^2-1\right)\sqrt[3]{x}\left(e^{-x^2}\right)\right) =$$

$$\tfrac{1}{x^2}\left(4x^4\sqrt[3]{x}e^{-x^2} - \tfrac{10}{3}x^2\sqrt[3]{x}e^{-x^2} - \tfrac{2}{9}\sqrt[3]{x}e^{-x^2}\right) = \tfrac{2}{9}\left(18x^4-15x^2-1\right)\left(e^{-x^2}\right)\left(\sqrt[3]{x}\right)^{-5}$$

Funktionen är kontinuerlig på hela reella axeln. Origo är en singulär punkt eftersom derivatan är odefinierad där.

Grafen till funktionen har vertikal tangent i origo.

Det finns två kritiska punkter $x_1 = \frac{1}{6}\sqrt{6}$ och $x_2 = -\frac{1}{6}\sqrt{6}$ till funktionen som är rötter till funktionens derivata $g'(x) = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(6x^2-1\right)\left(\sqrt[3]{x}\right)^{-2}\left(e^{-x^2}\right)$.

Första derivatan är negativ för x värden mindre och nära x_2 och positiva för värden x större och nära x_2. Detta medför enligt första derivatans test att f har ett lokalt minimum i x_2. Första derivatan är positiv för x värden mindre och nära x_1 och negativa för värden x större och nära x_1. Detta medför enligt första derivatans test att f har ett lokalt maximum i x_1.Vi observerar att $-f(x_2) = f(x_1) > 0$. Värdet av f i singulära punkten $x = 0$ är $f(0) = 0$.

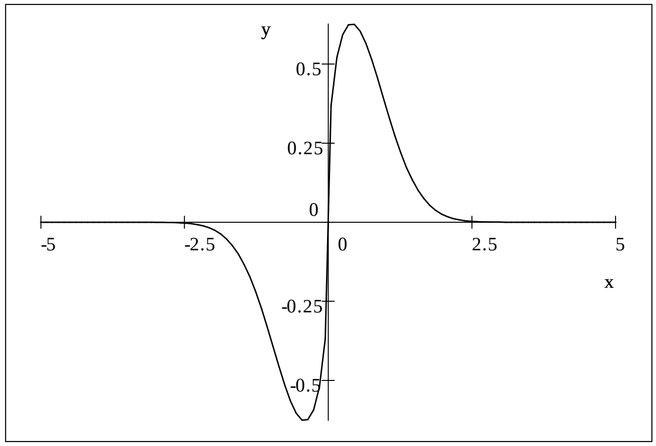
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Detta medför att $f(x_1)$ är ett absolut maximum och $f(x_2)$ är ett absolut minimum av f.

Funktionen f är avtagande på intervallet $(-\infty, x_2)$, växande på intervallet (x_2, x_1) och avtagande på integrvallet $(x_1, +\infty)$.

Andra derivatan $f'' = \frac{2}{9}\left(18x^4-15x^2-1\right)\left(e^{-x^2}\right)\left(\sqrt[3]{x}\right)^{-5}$, av f har två reella rötter: $x_3 = -\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{33}+5}$, $x_4 = \frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{33}+5}$.

Dessutom $f'' < 0$ på intervallet $(-\infty, x_3)$, $f'' > 0$ på intervallet $(x_3, 0)$, $f'' < 0$ på intervallet $(0, x_4)$, $f'' > 0$ på intervallet $(x_4, +\infty)$. Funktionen f är konkav neråt på intervallet $(-\infty, x_3)$, konkav uppåt på intervallet $(x_3, 0)$, konkav neråt på intervallet $(0, x_4)$, och konkav uppåt på intervallet $(x_4, +\infty)$.

Detta medför att funktionen f har tre böjningspunkter: x_3, x_4 och origo. Skiss till grafen:



5. **Linjär approximation.** Betrakta funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$ och dess linjär approximation för $x = 1,1$. Uppskatta feltermen för approximationen och ange intervallet där värdet $\sqrt[3]{1,1}$ ligger. (6p)

   $f(x) = f(1) + f'(1) \cdot 0.1 + \frac{1}{2} f''(s)(0.1)^2$ där $1 \leq s \leq 1.1$.

   $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x}\right) = \frac{1}{3x}\sqrt[3]{x}\Big|_{x=1} = \frac{1}{3}$

   $f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt[3]{x}\right) = -\frac{2}{9x^2}\sqrt[3]{x}\Big|_{x=s} = -\frac{2}{9s^2}\sqrt[3]{s}$

   Linjär approximation är $L = 1 + \frac{1}{3} \cdot 0.1 \approx 1.033333$

   Feltermen $E = \frac{1}{2} f''(s)(0.1)^2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{9s^{5/3}}\right) 0.01 = -\frac{1}{9} 0.01 s^{-5/3}$.

   $E < 0$ och $|E| \leq \frac{1}{9} 0.01$ för $1 \leq s \leq 1.1$.

   Det betyder att $f(1.1)$ ligger i följande intervall: $1 + \frac{1}{3} \cdot 0.1 - \frac{1}{9} 0.01 \leq f(1.1) \leq 1 + \frac{1}{3} \cdot 0.1$.

6. **Gränsvärden och Taylors polynom.**

   Beräkna gränsvärde: $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos(3x) - 1}{\exp(x) - 1 + \ln(1-x)}$ (6p)

   $$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(3x) - 1}{\exp(x) - 1 + \ln(1-x)} =$$

   $$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{(3x)^2}{2} + O(x^4) - 1}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4) - 1 + (-x) - \frac{1}{2}(-x)^2 + \frac{(-x)^3}{3} + O(x^4)} =$$

   $$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{(3x)^2}{2} + O(x^4)}{-\frac{x^3}{6} + O(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{9^2}{2} + O(x^2)}{-\frac{x}{6} + O(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-81 + O(x^2)}{-x + O(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{81}{x} + O(x^2)}{1 + O(x^2)}$$

   Inget gränsvärde finns eftersom funktionen växer oändligt i absolut belopp då x går mot 0.Dessutom $\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{81}{x} + O(x^2)}{1 + O(x^2)} = +\infty$; $\lim_{x\to 0-} \frac{\frac{81}{x} + O(x^2)}{1 + O(x^2)} = -\infty$

7. **Geometri i rummet.** Ange en ekvation för ett plan genom punkten $(1, 1, 2)$ så att planet är parallellt med vektorn $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och med y - axeln. (6p)

Normalen $\overrightarrow{N}$ till sökta planet måste vara vinkelrät mot vektorn $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och mot vektorn $\overrightarrow{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ samtidigt. $\overrightarrow{N}$ kan väljas som

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{v} = \det \begin{bmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \overrightarrow{i} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \overrightarrow{k} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ekvationen för planet är: $(x-1) - (z-2) = 0$.

Ett annat geometriskt resonemang för att få fram normalvektorn $\overrightarrow{N}$ till sökta planet är möjligt. Observera att $N_y = 0$ eftersom planet är parallellt med y - axeln.Observera sedan att $\overrightarrow{v}$ är vinkelrät mot $\overrightarrow{N}$, d.v.s. skaläprodukten $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{N}$ måste vara noll $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{N} = v_x N_x + v_z N_z = 2N_x + 2N_z = 0$ som medför att $N_x = -N_z$. Sista observationen ger ekvationen för planet: $(x-1) - (z-2) = 0$.

8. **Geometri i rummet.** Bestäm minimalt avstånd mellan x - axeln och linjen definierad av ekvationen $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-1}{2}$. (6p)

Avståndet mellan två linjer är absolut belopp av projektionen $\left| \dfrac{\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{N}}{\left|\overrightarrow{N}\right|} \right|$ av vektorn $\overrightarrow{R}$ mellan några två punkter i dessa linjer på en vektor $\overrightarrow{N}$ vinkelrät mot dessa två linjer. En punkt på given linje är $(2, 1, 1)$. En punkt på x - axeln är origo.

Detta medför att $\overrightarrow{R}$ kan väljas som $\overrightarrow{R} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Riktningsvektorn $\overrightarrow{V}$ av linjen är $\overrightarrow{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{V} = \det \begin{bmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = -\overrightarrow{j} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \overrightarrow{k} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Avståndet D blir: $D = \left| \dfrac{\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{N}}{\left|\overrightarrow{N}\right|} \right| = \dfrac{|R_x N_x + R_y N_y + R_z N_z|}{\sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}} = \dfrac{|1 \cdot (-2) + 1 \cdot 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$

Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättats, ta sedan den som känns vara näst lättast o.s.v.

Maxpoäng: 50 ; **3:** 20; **4:** 30; **5:** 40