MATEMATIK Chalmers A.Heintz | Datum: 2013-01-16 Hjälpmedel: inga | Tid: förmiddag

Lösningar till **tenta i TMV036/TMV035 Analys och linjär algebra K/Bt/Kf, del A.**

1. **Sats.** Formulera och bevisa Rolles' sats. Se boken. **(6p)**

2. **Gränsvärden.**

   Bestäm asymptoter till grafen av följande funktion: $f(x) = \frac{x^2+x+1}{2x+1}$. **(3p)**

   Lutningen av en asymptot ges av gränsvärden $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{2x+1}\right)/x = 1/2$.

   Position av asymptoten ges av gränsvärdet $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{2x+1} - x/2\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+2)}{2(2x+1)} = 1/4$.

   Funktionen f har en lutande asymptot $y = 1/4 + x/2$.

   Funktionen f har en vertikal asymptot $x = -1/2$.

   Bestäm följande gränsvärde om det finns: $\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{x^2+x+1}{2x\ +1}\right)$ **(3p)**

   $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{2x+1}\right) = +\infty$. Det gör att argumentet hos cos i uttrycket $\cos\left(\frac{x^2+x+1}{2x\ +1}\right)$ växer oändligt.

   Funktionen $\cos\left(\frac{x^2+x+1}{2x\ +1}\right)$ svänger mellan värden $+1$ och -1 oändligt många gånger då $x\to+\infty$. Det gör att $\cos\left(\frac{x^2+x+1}{2x\ +1}\right)$ inte kan gå mot något gränsvärde då $x\to+\infty$.

3. **Tillämpning av derivator.** Betrakta funktionen:

$$g(x) = \begin{cases} (x+2)^2 x, & x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & 0 \le x \end{cases}$$

   Bestäm punkter där funktionen inte är kontinuerlig, singulära punkter, lokala extrempunkter, absolut maximum och absolut minimum om de finns. **(6p)**

   Bestäm de intervall där funktionen är växande, avtagande, böjningspunkter (inflection points), och de intervall där funktionen är konkav uppåt och konkav neråt. Rita en skiss av grafen till funktionen. **(4p)**

   Funktionen har samma vänster och höger gränsvärden 0 i origo och är kontinuerlig på hela reella linjen.

   Vi söker först kritiska punkter och beräknar derivator av funktioner i olika delar av definitionsmängden:

   För $x < 0$:

   $\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}((x+2)^2 x) = 4x + 2x^2 + (x+2)^2 = (x+2)(3x+2)$, kritiska punkter är $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{2}{3}$.

   För $x \ge 0$:

$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}\left(1 - e^{-x}\right) = e^{-x}$. Funktionen har inga kritiska punkter för $x \geq 0$.

Vänsterderivata i origo är lika med 4 och högerderivata i origo är lika med 1. Det gör att derivatan saknas i origo och origo är en simgulär punkt.

$\frac{dg}{dx} > 0$ för $x < -2$, $\frac{dg}{dx} < 0$ för $x > -2$ nära $x_1 = -2$. Förstaderivatans test medför att g har ett lokalt maximum $g(-2) = 0$ i $x_1 = -2$.

$\frac{dg}{dx} < 0$ för $x < -2/3$, $\frac{dg}{dx} > 0$ för $x > -2/3$ nära $x_2 = -2/3$. Förstaderivatans test medför att g har ett lokalt minimum $g(-2/3) = (-2/3 + 2)^2 (-2/3) = -\frac{32}{27}$ i $x_2 = -2/3$.

$g(0) = 0. \frac{dg}{dx} > 0$ för $x < 0$, $\frac{dg}{dx} > 0$ för $x > 0$ för x nära 0. Origo är inte lokal extrempunkt för g.

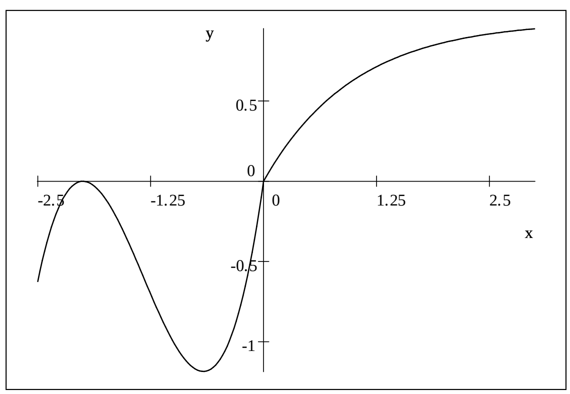
$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$, men $g(x) < 1$för alla reella x. $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$. Det gör att absolut maximum och absolut minimum saknas.

$\frac{dg}{dx} > 0$ för $-\infty < x < -2$, för $-2/3 < x < 0$, för $0 < x < +\infty$. Funktionen g är växande i dessa intevall.

$\frac{dg}{dx} < 0$ för $-2 < x < -2/3$ Funktionen g är avtagande i detta intevall.

$\frac{d^2g}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left((x+2)(3x+2)\right) = 6x + 8$ för negativa x. $\frac{d^2g}{dx^2} = 0$ för $x = -8/6 = -4/3$. Funktionen g har en böjningspunkt i $x = -4/3$, konkav neråt för $-\infty < x < -4/3$ och konkav uppåt för $-4/3 < x < 0$

$\frac{d^2g}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right) = -e^{-x} < 0$ för positiva x. Funktionen g är konkav neråt för $0 < x < +\infty$.



4. **Linjär approximation.** Betrakta funktionen $f(x) = \cos(x)$ och dess approximation för $x = \pi/3 + 0,1$ som linjär approximation kring $a = \pi/3$. Uppskatta feltermen för den approximationen och ange intervallet där värdet $\cos(\pi/3 + 0,1)$ måste ligga enligt dessa uppskattningar. **(6p)**

Linjär approximation $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$

Felterm $E(x) = f(x) - L(x) = 1/2\, f''(s)(x - a)^2$, för ett okänt s mellan a och x.

$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + 1/2\, f''(s)(x - a)^2$ där sista termen är okänd, med kan uppskattas med att titta på möjliga värden av $f''(s)$ för s mellan a och x.

$f(a) = \cos(\pi/3) = 0,5$.

$f'(a) = -\sin(a) = -\sin(\pi/3) = -\sqrt{3}/2$,

$f''(s) = -\cos(s)$.

$L(\pi/3+0,1) = f(a) + f'(a)(x-a) = 0,5 - (0,1)\sqrt{3}/2$

$E(\pi/3+0,1) = 0,005\, f''(s)$ för ett okänt s mellan a och x.

$\left|f''(s)\right| = \cos(s)$ är en avtagande funktion på intervall $(\pi/3, \pi/3+0,1)$. Det gör att $\left|f''(s)\right| \le \left|f''(\pi/3)\right| = \cos(\pi/3) = 0,5$ och $|E(\pi/3+0,1)| \le 0,005 \cdot 0,5 = 0,0025$.

$E(\pi/3+0,1) < 0$

Värdet $\cos(\pi/3{+}0,1)$ måste ligga i intervallet $\left[0,5 - (0,1)\sqrt{3}/2 - 0,0025; 0,5 - (0,1)\sqrt{3}/2\right]$

5. **Gränsvärden och Taylors polynom.**

   Beräkna gränsvärdet: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(-x)+x-1}{\cos(x)-1}$ **(6p)**

   $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(-x)+x-1}{\cos(x)-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(-x)+x-1}{\cos(x)-1} = \lim_{x\to 0} \frac{1-x+x^2/2+O(x^3)+x-1}{1-x^2/2+O(x^4)-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2+O(x^3)}{-x^2/2+O(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+O(x)}{-1+O(x^2)} = -1$

   Samma resultat kan lätt fås med att tillämpa l'Hopitals regel två gånger:

   $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(-x)+x-1}{\cos(x)-1} = \lim_{x\to 0} \frac{(\exp(-x)+x-1)''}{(\cos(x)-1)''} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(-x)}{-\cos(x)} = -1$

6. **Geometri i rummet.** Tre punkter är givna $A = (1,2,-1)$, $B = (5,-3,2)$, $C = (-1,2,1)$.Ange en ekvation för ett plan genom dessa punkter. **(6p)**Normal till sökta planet kan väljas som $\overrightarrow{N} = \left(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{C}\right) \times \left(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}\right)$. Ekvationen för planet kan skrivas som $\left(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{A}\right) \cdot \overrightarrow{N} = 0$, där $\overrightarrow{r}$ är en ortsvektor av en godtycklig punkt på planet.

   $$\overrightarrow{A} - \overrightarrow{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

   $$\overrightarrow{N} = \left(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{C}\right) \times \left(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 14 \\ 10 \end{bmatrix}$$

   Vi kan istället välja en kortare normalvektorn $\overrightarrow{N} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$

   Ekvationen$\left(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{A}\right) \cdot \overrightarrow{N} = 0$ för planet blir: $5(x-1) + 7(y-2) + 5(z+1) = 0$.

7. **Geometri i rummet.** Ange avståndet mellan en linje $\mathcal{L}$ och en punkt P. **(6p)**

   Linjen är given med ekvationer på standart form: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+2}{-2}$. Punkten P har koordinater: $(2,1,-1)$.

   Linjen går genom punkten Q med koordinater $(1,0,-2)$ och har riktningsvektorn $\overrightarrow{V}$ med koordinater $(3,2,-2)$.

   Avståndet ges av formeln:

   $$d = \frac{\left|\left(\overrightarrow{P} - \overrightarrow{Q}\right) \times \overrightarrow{V}\right|}{\left|\overrightarrow{V}\right|}$$

där $\overrightarrow{P}$ och $\overrightarrow{Q}$ är ortsvektorer av punkter P och Q .

$$\overrightarrow{P} - \overrightarrow{Q} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \left(\overrightarrow{P} - \overrightarrow{Q}\right) \times \overrightarrow{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\left|\left(\overrightarrow{P} - \overrightarrow{Q}\right) \times \overrightarrow{V}\right| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{42}; \quad \left|\overrightarrow{V}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{17}$$

$$d = \sqrt{42/17}$$

8. **Vektorer.** Vektorer $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ är givna av sina koordinater: $\overrightarrow{a}$: $(1, 1, -4)$ och $\overrightarrow{b}$: $(1, -2, 2)$.

   Bestäm vinkeln mellan vektorer $\overrightarrow{a}$, och $\overrightarrow{b}$. **(4p)**

   $$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = (1, 1, -4) \cdot (1, -2, 2) = 1 - 2 - 8 = -9$$

   $$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2} = 3\sqrt{2}; \quad \left|\overrightarrow{b}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

   $$\cos(\theta) = \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right) / \left(|\overrightarrow{a}| \left|\overrightarrow{b}\right|\right) = \frac{-9}{3\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

   Detta medför att θ $=3/4\pi$. Komplement vinkeln är $\pi/4$ eller 45 grader. Båda svar är korrekta.

   Tips: Börja lösa från den som verkar vara lättats, ta sedan den som känns vara näst lättast o.s.v.

Maxpoäng: 50 ; **3:** 20; **4:** 30; **5:** 40