MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen 2007-12-19, kl. 08.30 - 12.30

TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B

Telefonvakt: Magnus Goffeng, telefon: 0762 - 721860
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgifterna 1–5 (totalt 16 poäng) är korta frågor på det grundläggande materialet och du behöver endast ge kortfattade lösningar och svar.

På uppgifterna 6–10 (totalt 34 poäng) skall du ge fullständiga lösningar. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

Lösningar anslås på MV första arbetsdagen efter tentamenstillfället.
Resultat meddelas via epost från LADOK.

---

1. Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. (3p)

2. Beräkna integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)}\,dx$. (3p)

3. Bestäm en bas för nollrummet och kolonnrummet till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (3p)

4. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y' + 3\sqrt{x}\,y = 3\sqrt{x}, \; x > 0 \\ y(0) = 2. \end{cases}$ (4p)

5. Bestäm inversen till $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ och lös sedan med hjälp av denna ekvationssystemet (3p)

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 1 \\ 6x_1 + 7x_2 = 2 \end{cases}$$

Till uppgifterna 6–10 skall du lämna in fullständiga lösningar.

6. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = (2x+2)\cdot e^{-2x}, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$ (8p)

7. Lös matrisekvationen $AX = B + CX$, där (7p)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 13 \\ -7 & -6 \\ -7 & -8 \\ 16 & 22 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Vänd!

8. Då en cell växer, sker detta till en början så att ökningen av massan per tidsenhet är proportionell mot cellens begränsningsarea. Man kan anta att cellen är sfärisk och att dess densitet är konstant. Vid en given tidpunkt $t = 0$ är cellens massa m_0 och T tidsenheter senare är den $8m_0$. Härled en differentialekvation för cellens massa $m(t)$. Lös därefter differentialekvationen och bestäm $m(t)$. (7p)

9. Visa att om den reella funktionen f är kontinuerlig på ett intervall I och $a \in I$ så är $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ en primitiv funktion till f på intervallet I. (6p)

10. (6p)

(a) Hur definieras e^{ix} ?

(b) Visa att $e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}$.

(c) Förklara varför ett komplext tal z vrids $\frac{\pi}{2}$ radianer motsols om det multipliceras med i.

Lösningar AlaB 2007-12-19

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \textcircled{-2}\,\textcircled{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \textcircled{2}\,\textcircled{1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = \underline{\underline{24}}$$

---

2. $$\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \left[\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right] = \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \Big[\ln x - \ln(x+1)\Big]_1^\infty = \left[\ln\frac{x}{x+1}\right]_1^\infty = \lim_{x\to\infty} \ln\frac{x}{x+1} - \ln\frac{1}{1+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \ln\frac{1}{1+\frac{1}{x}} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{1}{1+0} + \ln 2 = \underline{\underline{\ln 2}}$$

---

3. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \textcircled{1}\,\textcircled{-2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \textcircled{-1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En bas för col(A) är $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

$A\vec{x} = 0 \iff \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ $x_3 = t$ är en fri variabel

$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -3t \\ x_3 = t \end{cases}$ $\vec{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$. En bas för Nul(A) är $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

---

4. $y' + 3\sqrt{x}\,y = 3\sqrt{x}$, $x \geq 0$, $y(0) = 2$.

Integrerande faktor är $e^{\int 3\sqrt{x}\,dx} = e^{2x\sqrt{x}}$

Dvs $\left(y \cdot e^{2x\sqrt{x}}\right)' = 3\sqrt{x} \cdot e^{2x\sqrt{x}}$ $\left(D\, x\sqrt{x} = D\, x^{3/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}\right)$

$$y \cdot e^{2x\sqrt{x}} = \int 3\sqrt{x}\, e^{2x\sqrt{x}}\,dx = e^{2x\sqrt{x}} + C$$

$y(x) = 1 + Ce^{-2x\sqrt{x}}$, $y(0) = 1 + C = 2$, $\underline{C = 1}$

Svar: $\underline{y(x) = 1 + e^{-2x\sqrt{x}}, \ x \geq 0}$

---

5. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{28-18}\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$.

$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ har lösningen

$$\vec{x} = A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

---

6. $y'' + 3y' + 2y = (2x+2)e^{-2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

$p(r) = r^2 + 3r + 2$, karakteristisk ekv. $r^2 + 3r + 2 = 0$

$r_{1,2} = -2, -1$

Homogen lösning är

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Vi söker partikulärlösning: sätt $y_p = ze^{-2x}$

$P(D)y_p = e^{-2x} \cdot P(D-2)\,z = (2x+2)e^{-2x}$

Dvs $P(D-2)\,z = 2x+2$, $P(r-2) = (r-2)^2 + 3(r-2) + 2$

$= r^2 - 4r + 4 + 3r - 6 + 2$

$z'' - z' = 2x + 2$ $= r^2 - r$

Vi ansätter $z(x) = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$

$\begin{cases} z' = 2Ax + B \\ z'' = 2A \end{cases}$, $z'' - z' = -2Ax + 2A - B = 2x + 2$

Dvs $-2A = 2$, $2A - B = 2$.

$A = -1$, $B = 2A - 2 = -4$

Dvs $z(x) = -x^2 - 4x$ och $y_p(x) = -(x^2 + 4x)e^{-2x}$

De allmänna lösningen är

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} - (x^2 + 4x)e^{-2x}$$

Och $y'(x) = -C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-2x} - (2x+4)e^{-2x} + 2(x^2 + 4x)e^{-2x}$

$\begin{matrix} y(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ y'(0) = -C_1 - 2C_2 - 4 = 1 \end{matrix}$ $\begin{cases} C_2 = -C_1 = -5 \\ C_1 = 5 \end{cases}$

Svar: $y(x) = 5e^{-x} - (x^2 + 4x + 5)e^{-2x}$

7. $AX = B + CX \quad , \quad AX - CX = B$

$(A-C)X = B \quad , \quad X = (A-C)^{-1}B \, .$

$$[A-C \,\vdots\, I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&1&1&0&0&0\\ 0&1&1&-1&0&1&0&0\\ 0&0&1&-1&0&0&1&0\\ 1&1&1&2&0&0&0&1 \end{array}\right] \textcircled{\scriptsize -1} \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&1&1&0&0&0\\ 0&1&1&-1&0&1&0&0\\ 0&0&1&-1&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&-1&0&0&1 \end{array}\right] \textcircled{\scriptsize 1}\textcircled{\scriptsize -1} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&0&2&0&0&-1\\ 0&1&1&0&-1&1&0&1\\ 0&0&1&0&-1&0&1&1\\ 0&0&0&1&-1&0&0&1 \end{array}\right] \textcircled{\scriptsize -1} \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&0&0&3&0&-1&-2\\ 0&1&0&0&0&1&-1&0\\ 0&0&1&0&-1&0&1&1\\ 0&0&0&1&-1&0&0&1 \end{array}\right] \textcircled{\scriptsize -1} \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&3&-1&0&-2\\ 0&1&0&0&0&1&-1&0\\ 0&0&1&0&-1&0&1&1\\ 0&0&0&1&-1&0&0&1 \end{array}\right]$$

$= (A-C)^{-1}$

Svar:

$$X = \begin{bmatrix} 3&-1&0&-2\\ 0&1&-1&0\\ -1&0&1&1\\ -1&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9&13\\ -7&-6\\ -7&-8\\ 16&22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2&1\\ 0&2\\ 0&1\\ 7&9 \end{bmatrix} .$$

---

8. Om cellens radie är r så är arean $4\pi r^2$.

$\frac{dm}{dt}$ är därför proportionell mot r^2, dvs

$\frac{dm}{dt} = \text{konstant} \cdot r^2 .$

Eftersom massan $m = \text{volym} \cdot \text{densitet} = \frac{4\pi}{3} r^3 \cdot \text{densitet}$ följer att $r^2 = \text{konstant} \cdot m^{2/3}$ och därför erhåller vi den separabla differentialekvationen

$$\frac{dm}{dt} = \alpha \cdot m^{2/3} \; , \quad \alpha = \text{konstant} , \quad t \geq 0 .$$

$$\int \frac{dm}{m^{2/3}} = \int \alpha \, dt = \alpha t + c \quad \text{Dvs} \quad \underline{\underline{m(t) = \left(\tfrac{\alpha}{3} t + \tfrac{c}{3}\right)^3}}$$

$$= 3m^{1/3}$$

Men $m_0 = m(0) = \left(\frac{c}{3}\right)^3 , \quad \frac{c}{3} = m_0^{1/3}$

$8m_0 = m(T) = \left(\frac{\alpha}{3}T + \frac{c}{3}\right)^3 , \quad \frac{\alpha}{3} T = 2m_0^{1/3} - m_0^{1/3} = m_0^{1/3}$

Alltså är

$$m(t) = \left(m_0^{1/3} \frac{t}{T} + m_0^{1/3}\right)^3 = \underline{\underline{m_0 \left(\frac{t}{T} + 1\right)^3}} , \quad t \geq 0$$

AlaB, 20071219: Rättelse.

I uppgift 6 stod det

(1) $\quad y'' + 3y' + 2 = (2x+2)e^{-2x} .$

Men det borde ha stått

(2) $\quad y'' + 3y' + 2y = (2x+2)e^{-2x}$

Lösningen av (2) finns ovan.

(1) med $y(0) = 0 , \; y'(0) = 1 .$

Lösning: karakteristisk ekv. $r^2 + 3r = 0 , \; r_1 = -3 , \; r_2 = 0$

Homogen lösning är $y_h(x) = c_1 + c_2 e^{-3x}$,

Vi söker partikulärlösning y_p :

$$y_p'' + 3y_p' = (2x+1)e^{-2x} - 2$$

Ansätt

$$y_p = (Ax+B)e^{-2x} + Cx$$

$$y_p' = (-2Ax + A - 2B)e^{-2x} + C$$

$$y_p'' = (4Ax - 4A + 4B)e^{-2x}$$

$y_p'' + 3y_p' = (-2Ax - A - 2B)e^{-2x} + 3C = (2x+2)e^{-2x} - 2$

Dvs $\; -2A = 2 , \; -A - 2B = 2 , \; 3C = -2$

$A = -1 , \; B = -1/2 , \; C = -2/3$

Allmän lösning: $y(x) = y_h + y_p = C_1 + C_2 e^{-3x} - (x+\frac{1}{2})e^{-2x} - \frac{2}{3}x$

$y'(x) = -3C_2 e^{-3x} - e^{-2x} + 2(x+\frac{1}{2})e^{-2x} - \frac{2}{3}$

$y(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{2} = 0 \; , \; y'(0) = -3C_2 - 1 + 1 - \frac{2}{3} = 1$

$C_1 = 19/18$

$C_2 = -5/9$

Svar $y(x) = \frac{19}{18} - \frac{2}{3}x - \frac{5}{9}e^{-3x} - (x+\frac{1}{2})e^{-2x}$