MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

2009-08-24, kl. 08.30 - 12.30

TMV036/TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B

Telefonvakt: David Witt-Nyström, telefon: 0762 - 721861
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgifterna 1-4 (totalt 18 poäng) är korta frågor på det grundläggande materialet och du behöver endast ge kortfattade lösningar och svar.

På uppgifterna 5-9 (totalt 32 poäng) skall du ge fullständiga lösningar. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

Lösningar anslås på MV första arbetsdagen efter tentamenstillfället.
Resultat meddelas via epost från LADOK.

---

1. (a) Bestäm inversen till $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$. (3p)

(b) Kontrollera att du räknat rätt genom att beräkna AA^{-1}. (1p)

2. Beräkna $\dfrac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}+i)^3}$. (3p)

3. Lös ekvationssystemet nedan. (Skriv upp dess utökade matris och reducera till trappstegsform.) (4p)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= -2 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 4 \end{cases}$$

4. Beräkna integralerna

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \tan x dx$ (3p)

(b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2x}{1+x^4} dx$. (4p)

Till uppgifterna 5–9 skall du lämna in fullständiga lösningar.

5. Lös begynnelsevärdesproblemet (7p)

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = (30x - 71)e^{-4x}, \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

6. Bestäm arean av den yta som uppstår då kurvan (6p)
$y = \dfrac{x\sqrt{x}}{3} - \sqrt{x}$, $0 \le x \le 3$, roterar kring y-axeln.

Vänd!

7. Låt $y(x)$ vara lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$xy'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Bestäm de fyra första koefficienterna i taylorutvecklingen av y:
$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$
Ledning: Sök efter ett så kallat rekursivt samband mellan koefficienterna (a_{n+1} uttrycks i temer av de tidigare koefficienterna) genom att sätta in utvecklingen i differentialekvationen. Vad är a_0 och a_1?

8. (a) Definiera begreppet linjär avbildning.
Avgör också vilka av följande avbildningar som är linjära

i. $T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{bmatrix}$

ii. $T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

(b) Visa att om $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning så finns en matris A sådan att $T(x) = Ax$, för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. (Dvs. varje linjär avbildning är en matrisavbildning.) (

9. Formulera och bevisa medelvärdessatsen för integraler. (

Lösningar ALA B, TMV036, 2009-08-24.

1.

a)
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 17 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 3 & -8 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 27 & 10 & -24 \\ 0 & 1 & 0 & -19 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 3 & -8 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \; \underbrace{\begin{array}{ccc} -11 & -4 & 10 \\ -19 & -7 & 17 \\ 9 & 3 & -8 \end{array}}_{=A^{-1}}\right]$$

b)
$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -11 & -4 & 10 \\ -19 & -7 & 17 \\ 9 & 3 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -55+38+18 & -20+14+6 & 50-34-16 \\ -11+38-27 & -4+14-9 & 10-34+24 \\ -66+57+9 & -24+21+3 & 60-51-8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ok.}$$

2.
$$\frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}+i)^3} = \frac{(\sqrt{2}\,e^{i\pi/4})^4}{(2e^{i\pi/6})^3} = \frac{4e^{i\pi}}{8e^{i\pi/2}} = \frac{1}{2}e^{i\pi/2} = \underline{\underline{\frac{i}{2}}}$$

3.
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Dvs} \quad \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_4 = -1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_3 = s \\ x_4 = t \end{matrix} \quad \text{fria variabler}$$

Svar:
$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

4.

a)
$$\int_0^{\pi/3} \tan x\,dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \left[\begin{matrix} t = \cos x & \frac{\pi}{3} \to \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ dt = -\sin x\,dx & 0 \to \cos 0 = 1 \end{matrix}\right.$$

$$= \int_1^{1/2} \frac{-dt}{t} = \int_{1/2}^{1} \frac{dt}{t} = \Big[\ln t\Big]_{1/2}^{1} = \ln 1 - \ln\frac{1}{2} = \underline{\underline{\ln 2}}$$

b)
$$\int_1^{\infty} \frac{2x}{1+x^4}\,dx = \begin{bmatrix} t = x^2 & x \to \infty \to t \to \infty \\ dt = 2x\,dx & x = 1 \to t = 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \Big[\arctan t\Big]_1^{\infty} = \lim_{t\to\infty} \arctan t - \arctan$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$

---

5. Karakteristisk ekvation är $r^2 - 3r + 2 = 0$, $r = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}$
$= \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} = \{$

Den allmänna homogena lösningen är
$$y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}.$$

Vi ansätter partikulärlösningen $y_p = (Ax+B)e^{-4x}$

$y_p' = (-4Ax - 4B + A)e^{-4x}$, $y_p'' = (16Ax + 16B - 8A)e^{-4x}$

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = (16Ax + 16B - 8A + 12Ax + 12B - 3A + 2Ax + 2B)e^{-4x}$$
$$= (30Ax + 30B - 11A)e^{-4x}$$
$$= (30x - 71)e^{-4x}$$

Detta ger $30A = 30$, $30B - 11A = -71$.

$A = 1$, $30B = -71 + 11 = -60$, $B = -2$.

Dvs $y_p = (x-2)e^{-4x}$.

Allmän lösning är $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + (x-2)e^{-4x}$

$y(0) = c_1 + c_2 - 2 = 2$, $c_1 + c_2 = 4$, $c_1 = 4 - c_2$

$y'(x) = c_1 e^{x} + 2c_2 e^{2x} + (-4x+9)e^{-4x}$

$y'(0) = c_1 + 2c_2 + 9 = 0$, $c_2 = -13$, $c_1 = 17$

Svar: $y(x) = 17e^{x} - 13e^{2x} \ldots e^{-4x}$

6. Arean ges av $A = \int_0^3 2\pi x \sqrt{1+(y')^2}\, dx$

$y = \frac{x^{3/2}}{3} - x^{1/2}$, $y' = \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$1+(y')^2 = 1 + \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 = 1 + \frac{x}{4} + \frac{1}{4x} - 2\cdot\frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} =$

$= \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{1}{4x} = \frac{x^2+2x+1}{4x} = \frac{(x+1)^2}{4x}$

Dvs $2\pi x \sqrt{1+(y')^2} = 2\pi x \frac{x+1}{2\sqrt{x}} = \pi(x\sqrt{x} + \sqrt{x})$

$A = \pi \int_0^3 (x^{3/2} + x^{1/2})\, dx = \pi \left[\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^3$

$= \pi\left(\frac{18}{5}\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\right) = \underline{\underline{\frac{28\sqrt{3}}{5}\pi}}$

---

7. $y(0) = a_0 = 0$,

$y(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$

$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$

$y''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \ldots + n(n-1)a_n x^{n-2} + (n+1)n a_{n+1} x^{n-1} + \ldots$

$y'(0) = a_1 = 1.$

$xy'' + y = (2a_2 + a_1)x + (6a_3 + a_2)x^2 + \ldots + ((n+1)n a_{n+1} + a_n)x^n + \ldots$
$= 0$

Dvs $2a_2 + a_1 = 0$, $6a_3 + a_2 = 0$, $(12a_4 + a_3 = 0)$

$(n+1)n a_{n+1} + a_n = 0$, $a_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)n} a_n$

Dvs $a_2 = -\frac{1}{2\cdot 1} a_1 = -\frac{1}{2}$ $(a_1 = 1$ se ovan$)$

$a_3 = -\frac{1}{3\cdot 2} a_2 = -\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}$

$a_4 = -\frac{1}{4\cdot 3} a_3 = -\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12} = -\frac{1}{144}$

Svar: $y(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{144}x^4 + \ldots$