MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen 2009-04-16, kl. 14.00 - 18.00

TMV036 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B

Telefonvakt: Jacob Sznajdman, telefon: 0762 - 721860
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgifterna 1–4 (totalt 19 poäng) är korta frågor på det grundläggande materialet och du behöver endast ge kortfattade lösningar och svar.

På uppgifterna 6–9 (totalt 31 poäng) skall du ge fullständiga lösningar. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

Lösningar anslås på MV första arbetsdagen efter tentamenstillfället.
Resultat meddelas via epost från LADOK.

---

1. Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 2 & 8 & 3 & 17 \\ 1 & 5 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. (3p)

2. Beräkna integralerna (8p)

(a) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$

(b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2(x+1)} dx$.

3. Lös matrisekvationen $AX = C + BX$, där (4p)

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

4. Lös begynnelsevärdesproblemet (4p)

$$y' = (y^2 + 1)x, \quad y(1) = 0.$$

Till uppgifterna 5–9 skall du lämna in fullständiga lösningar.

5. Bestäm samtliga lösningar till differentialekvationen (6p)

$$y'' + 5y' + 4y = e^{-x}$$

6. Låt p vara en reell parameter. Bestäm, för varje värde på p, lösningarna till ekvationssystemet (7p)

$$\begin{cases} x_1 + px_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = p \\ px_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Vänd!

7. En rovdjurspopulation $y(t)$ växer med hastighet $-c \cdot y$ (avtar med andra ord). En annan population $x(t)$ skulle ha växt med hastighet $a \cdot x$ om den fått vara ifred, men rovdjuren gör att den dessutom minskas med hastighet $b \cdot x \cdot y$. Bestäm x och y som funktioner av tiden med begynnelsevärden $x(0) = x_0$ och $y(0) = y_0$. (Alla ingående parametrar a, b, c, x_0 och y_0 är positiva.) (6p)

8. (a) Ange definitionen för att en kvadratisk matris är inverterbar. (2p)

(b) Formulera och bevisa en sats om inverterbarhet för en produkt AB av matriser. (4p)

9. Visa att om den reella funktionen f är kontinuerlig på ett intervall I och $a \in I$ så är $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ en primitiv funktion till f på intervallet I. (6p)

Lösningar alcB 2009-04-16.

1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & 3 & 17 \\ 1 & 5 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (-2)\ (-1) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 8 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (2) \end{matrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-6-9) = \underline{\underline{15}}$$

2.

a) $$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x}, & x = t^2 \\ dx = 2t\,dt & \end{bmatrix} = \int_0^1 2t e^t\,dt$$

$$= [2te^t]_0^1 - \int_0^1 2e^t\,dt = 2e - 2[e^t]_0^1 =$$

$$= 2e - 2e + 2 = \underline{\underline{2}}$$

b) $$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x)} \overset{(*)}{=} \int_1^\infty \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}\right)dx = \left[-\ln x - \frac{1}{x} + \ln(x+1)\right]_1^\infty$$

$$= \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right]_1^\infty = -\ln 2 + \frac{1}{1} + \lim_{x\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right) = \underline{\underline{1 - \ln 2}}$$

(*) $$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} \quad ; \quad 1 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$$

$$x^2(A+C) + x(A+B) + B = 1,$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ A + B = 0 \\ B = 1 \end{cases}, \quad \begin{matrix} C = 1 \\ A = -1 \end{matrix}$$

---

3. $AX = C + BX$ ger $(A-B)X = C$

och $X = (A-B)^{-1}C$ om inversen existerar.

$$A - B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A-B)^{-1} = \frac{1}{6-1}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dvs $$X = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}}}$$

4. $y' = (y^2+1)x$ är en separabel ODE.

$$\frac{dy}{y^2+1} = x\,dx, \quad \int \frac{dy}{y^2+1} = \int x\,dx$$

Dvs

$$\arctan y = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$y(1) = 0$ ger

$$\underbrace{\arctan 0}_{=0} = \frac{1}{2}1^2 + C = \frac{1}{2} + C$$

Alltså är $C = -\frac{1}{2}$, och

$$\arctan y = \frac{1}{2}(x^2-1)$$

$$\underline{\underline{y = \tan \frac{1}{2}(x^2-1)}}, \quad \left(-\sqrt{1+\pi} < x < \sqrt{1+\pi}\right)$$

---

5. $y'' + 5y' + 4y = e^{-x}$.

Den karakteristiska ekvationen är

$$p(r) = r^2 + 5r + 4 = 0, \quad r = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = -\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$$

dvs rötterna är $r_1 = -4$, $r_2 = -1$.

Den allmänna homogena lösningen är

$y_h = Ae^{-4x} + Be^{-x}$, där A och B är konstanter.

För att finna en partikulärlösning så ansätter vi

$$y_p = z_p e^{-x}$$

Med hjälp av förskjutningsregeln finner vi att

$$P(D)y_p = P(D)z_p e^{-x} = e^{-x} \cdot P(D-1)z_p = e^{-x}(D^2+3D)z_p = e^{-x}$$

Dvs $z_p'' + 3z_p' = 1$. Vi ser att $z_p = \frac{1}{3}x$ är en lösning. Därmed är $y_p = \frac{x}{3}e^{-x}$. →

<u>Svar:</u> Den allmänna lösningen är

$$y(x) = y_h + y_p = Ae^{-4x} + Be^{-x} + \frac{x}{3}e^{-x}$$

där A och B är godtyckliga konstanter.

Om vi inte utnyttjar förskjutningsregeln så ansätter vi istället

$$y_p = Cxe^{-x}$$

Ce^{-x} är en homogen lösning och duger inte som ansättning $\Rightarrow$ multiplicera med x.

Sätt in i diff.ekvationen och lös ut C. (vilket ger $C = \frac{1}{3}$)

6\. Den utökade koefficientmatrisen för ekvationssystemet är

$$\begin{bmatrix} 1 & p & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & p \\ p & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & p & 1 & 1 \\ 0 & 1-p & 0 & p-1 \\ 0 & -(1+p^2) & 2-p & -p \end{bmatrix} \overset{p \neq 1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & p & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -(1+p^2) & 2-p & -p \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & p & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -(1+p^2) & 2-p & -p \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1+p \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2-p & -1-p-p^2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} p \neq 2 \\ \\ \frac{1}{2-p} \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1+p \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{p^2+p+1}{p-2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p+1-\frac{p^2+p+1}{p-2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{p^2+p+1}{p-2} \end{bmatrix}$$

Dvs om $p \neq 1$ och 2 så är

$$\begin{cases} x_1 = p+1 - \frac{p^2+p+1}{p-2} = -\frac{2p+3}{p-2} \\ x_2 = -1 \\ x_3 = \frac{p^2+p+1}{p-2} \end{cases}$$

Återstår två fall:

i) $p = 1$. Då får vi den utökade matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} -\frac{1}{2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dvs $\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_3 = \frac{1}{2} \\ x_2 \ \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$ $x_3 = 2t$ är en fri variabel

Dvs $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} - 3t \\ x_2 = \frac{1}{2} + t \\ x_3 = 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

ii) $p = 2$ ger den utökade matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

sista raden ger $0 = -7$

<u>Dvs lösning saknas.</u>

7\. Systemet av differentialekvationer är

$$\begin{cases} (1) \quad x'(t) = a \cdot x - b x \cdot y & x(0) = x_0 \\ (2) \quad y'(t) = -c \cdot y & y(0) = y_0 \end{cases}$$

Ekvation (2) har lösningen $y(t) = y_0 e^{-ct}$.

Insättning i (1) ger

$$x' = ax - by_0 e^{-ct} x$$

$$x' + (-a + by_0 e^{-ct})x = 0 \quad \text{(1:a ordningens linjär ODE)}$$

$\longrightarrow$

Integrerande faktor är

$$e^{\int(-a+by_0e^{-ct})\,dt} = e^{-at-\frac{by_0}{c}(e^{-ct}-1)} \qquad (*)$$

Dvs

$$\left(e^{-at-\frac{by_0}{c}(e^{-ct}-1)}\right)' = 0$$

och

$$e^{-at-\frac{by_0}{c}(e^{-ct}-1)}\cdot x(t) = A \qquad (\text{konstant }!)$$

$x(0) = x_0$ ger

$$\underbrace{e^{-a\cdot 0-\frac{by_0}{c}\underbrace{(e^{0}-1)}_{=0}}}_{=\,e^{0}=1}\cdot x_0 = A$$

Dvs $A = x_0$.

Svar:

$$\begin{cases} x(t) = x_0\, e^{at+\frac{by_0}{c}(e^{-ct}-1)} \\ y(t) = y_0\, e^{-ct} \end{cases}, \quad t \geq 0.$$

Anm: I valet av integrerande faktor, i $(*)$ ovan, som är bestämd sånär som på en konstant k: $e^{-at-\frac{by_0}{c}e^{-ct}+k}$ så väljer vi en sådan att exponenten blir 0 då $t=0$, dvs $k = \frac{by_0}{c}$. Detta underlättar räkningarna när konstanten A skall bestämmas m.h.a. av begynnelsedata x_0.