MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen 2009-12-17, kl. 8.30 - 12.30

TMV036 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B

Telefonvakt: Richard Lärkäng, telefon: 0703-088304
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgifterna 1–4 (totalt 21 poäng) är korta frågor på det grundläggande materialet och du behöver endast ge kortfattade lösningar och svar.

På uppgifterna 6–9 (totalt 29 poäng) skall du ge fullständiga lösningar. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

---

1. Låt $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(a) Skriv $\mathbf{v}_4$ som en linjärkombination av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. (3p)

(b) Bestäm en bas för $Span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$. (3p)

2. Bestäm standardmatrisen för den linjära avbildning $\mathbf{T}$ från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som motsvarar medurs rotation kring origo med vinkeln $\pi/3$, av punkter i xy-planet (t.ex. är $\mathbf{T}(2,0) = (1, -\sqrt{3})$ och $\mathbf{T}(2,2) = (1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$). (3p)

3. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' + 4y = e^{2x}$. (5p)

4. (a) Beräkna $\displaystyle\int_2^4 \frac{x}{x^2+x-2}\,dx$ (5p)

(b) Ange en Riemannsumma för $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x-2}$ på intervallet $[2,4]$ (2p)

(Riemannsumman behöver ej beräknas men du skall tydligt motivera varför ditt svar kan tolklas som en Riemannsumma)

Till uppgifterna 5–9 skall du lämna in fullständiga lösningar.

5. Låt R vara det område i xy-planet som begränsas av kurvan $y = e^x - 1$ samt linjerna $x = 0$ och $y = 1$. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området R roterar kring x-axeln. (6p)

6. Låt $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

(a) Bestäm tre elementära matriser E_1, E_2, E_3 som är sådana att $E_1E_2E_3A = I$. (4p)

(b) Antag att E_1, E_2, E_3 är sådana att $E_1E_2E_3A = I$.
Vilken matris ger då produkten $E_3^{-1}E_2^{-1}E_1^{-1}$? (1p)

(c) Antag att E_1, E_2, E_3 är sådana att $E_1E_2E_3A = I$.
Vilken matris ger då produkten $E_1E_2E_3$? (1p)

Vänd!

7. Det var jul hemma hos familjen Jansson när värmesystemet i deras hus plötsligen slutade fungera. Temperaturen utomhus var vid händelsen $-10°C$ medan det inne i huset var $20°C$ varmt. En timme efter händelsen hade temperaturen i huset sjunkit till $16°C$. Familjen bedömde att de kunde stanna kvar i huset så länge som temperaturen inte understeg $10°C$. När var det dags för familjen att packa väskorna och ge sig iväg till en varmare plats?

Tips: Det är rimligt att anta att temperatursänkningen per tidsenhet är proportionell mot skillnaden mellan inner- och yttertemperatur (Newtons avsvalningslag). Om $y(t)$ är temperaturen i huset t timmar efter att värmesystemet gått sönder så är i så fall

$$y' = k(y - (-10))$$

för någon proportionalitetskonstant k. (5p)

8. (a) Hur definieras e^{ix}, då x är ett reellt tal och i är den imaginära enheten? (1p)

(b) Skriv $2 - 2i$ på polär form (dvs. på formen $re^{i\theta}$). (2p)

(c) Visa att $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$. (3p)

9. Visa att en kvadratisk matris A är inverterbar om och endast om $detA \neq 0$. (6p)

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\cdot \arctan\frac{x}{a}\ ,\quad a>0. \qquad \int \frac{1}{x+a}\,dx = \ln|x+a|.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a},\quad a>0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|\ ,\quad a\neq 0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|\right)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|$$

Uttryck i integranden	**Substituera**
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\cdot sin(\theta),\ \ x = a\cdot cos(\theta)$
$\sqrt{a^2+x^2},\ \dfrac{1}{a^2+x^2}$	$x = a\cdot tan(\theta)$

Förskjutningsregeln

Om[1]

$$P(D)y = y'' + ay' + by,\ \text{dvs}\ \ P(D) = D^2 + aD + b$$

så är

$$P(D)z(x)e^{\alpha x} = e^{\alpha x}P(D+\alpha)z(x)$$

[1]Det räcker att $P(D)$ är en linjär differentialoperator med konstanta koefficienter

LÖSNINGSFÖRSLAG
till tenta 17 dec 2009

TMV036 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B

---

1. Låt $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(a) Skriv $\mathbf{v}_4$ som en linjärkombination av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. (3p)

Lösning:

$$\mathbf{v}_4 = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Systemets totalmatris är;

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{T}$$

Så det finns oändligt med lösningar, vilka kan beskrivas på parameterform enl;

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad s \in \mathbb{R}$$

Speciellt ger $s = 0$ lösningen $x_1 = -3, x_2 = 2, x_3 = 0$ så $\mathbf{v}_4 = -3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$

Svar: t.ex. $\mathbf{v}_4 = -3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$

(b) Bestäm en bas för $Span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$. (3p)

Lösning: $Span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\} = ColT$ där T är totalmatrisen från deluppgift (a). Enligt Sats i kursen så bildar pivotkolonnerna i T en bas för $ColT$. Vi ser att den reducerade matrisen $\tilde{T}$ i deluppgift (a) har en pivotplats i första och andra kolonnen så motsvarande kolonner i T bildar en bas för $ColT$ så;

Svar: t.ex. så bildar $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ en bas för $Span\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$

2. Bestäm standardmatrisen för den linjära avbildning $\mathbf{T}$ från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som motsvarar medurs rotation kring origo med vinkeln $\pi/3$, av punkter i xy-planet (t.ex. är $\mathbf{T}(2,0) = (1, -\sqrt{3})$ och $\mathbf{T}(2,2) = (1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$). (3p)

Lösning: Kolonnerna i avbildningens standardmatris A är bilden av standardbasvektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Eftersom $\mathbf{T}(1,0) = (\cos(-\pi/3), \sin(-\pi/3)) = (1/2, -\sqrt{3}/2)$ och $\mathbf{T}(0,1) = (-\sin(-\pi/3), \cos(-\pi/3)) = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ så får vi;

$$A = [\mathbf{T}(\mathbf{e}_1) \;\; \mathbf{T}(\mathbf{e}_2)] = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Alternativt kan vi använda informationen i uppgiften som säger att $\mathbf{T}(2,0) = (1, -\sqrt{3})$ och $\mathbf{T}(2,2) = (1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$. Linjäriteten ger då att;

$$\mathbf{T}(1,0) = \frac{1}{2}\mathbf{T}(2,0) = \frac{1}{2}(1, -\sqrt{3}) = (1/2, -\sqrt{3}/2)$$

$$\mathbf{T}(0,1) = \frac{1}{2}(\mathbf{T}(2,2) - \mathbf{T}(2,0)) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}, 1) = (\sqrt{3}/2, 1/2)$$

Svar: Standardmatrisen för $\mathbf{T}$ är $\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

3. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' + 4y = e^{2x}$. (5p)

Lösning: Karakteristiska ekvationen $r^2+4 = 0$ har lösningarna $r_{12} = \pm 2i$ så motsvarande homogena ekvation har lösningarna $y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. Som partikulärlösning ansätter vi; $y_p = Ae^{2x}$. Insättning i differentialekvationens vänsterled ger då; $4Ae^{2x}+4(Ae^{2x}) = 8Ae^{2x}$, vilket blir samma som högerledet e^{2x} om $A = \frac{1}{8}$, så $y_p = \frac{1}{8}e^{2x}$ är en partikulärlösning. Den allmänna lösningen till differentialekvationen får vi nu genom att addera homogenlösningarna till partikulärlösningen;

Svar: Lösningarna till differentialekvationen har formen $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{8}e^{2x}$

4. (a) Beräkna $\displaystyle\int_2^4 \frac{x}{x^2+x-2}\,dx$ (5p)

Lösning:

$$\int_2^4 \frac{x}{x^2+x-2}\,dx = \int_2^4 \frac{x}{(x-1)(x+2)}\,dx = \int_2^4 \left(\frac{1/3}{x-1} + \frac{2/3}{x+2}\right)dx =$$

$$= \left[\frac{1}{3}\ln(x-1) + \frac{2}{3}\ln(x+2)\right]_2^4 = \frac{1}{3}\ln 3 + \frac{2}{3}\ln 6 - \frac{2}{3}\ln 4 = \ln 3 - \frac{2}{3}\ln 2$$

Svar: $\ln 3 - \frac{2}{3}\ln 2$

(b) Ange en Riemannsumma för $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x-2}$ på intervallet $[2, 4]$ (2p)

(Riemannsumman behöver ej beräknas men du skall tydligt motivera varför ditt svar kan tolklas som en Riemannsumma)

Lösning: En Riemannsumma för funktionen $f(x)$ på intervallet $[2, 4]$ har formen

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

där $2 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = 4$ och $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, för $i = 1, ..., n$.
Med $n = 2$ och $x_0 = 2, x_1 = 3, x_2 = 4$, samt $\xi_1 = 3, \xi_2 = 4$, så får vi speciellt;

$$\sum_{i=1}^{2} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(3)(3-2) + f(4)(4-3) = \frac{3}{10}\cdot 1 + \frac{4}{18}\cdot 1 \quad (= \frac{47}{90} \approx 0.52)$$

Svar: t.ex. $\frac{3}{10}\cdot 1 + \frac{4}{18}\cdot 1$

Till uppgifterna 5–9 skall du lämna in fullständiga lösningar.

5. Låt R vara det område i xy-planet som begränsas av kurvan $y = e^x - 1$ samt linjerna $x = 0$ och $y = 1$. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området R roterar kring x-axeln. (6p)

Lösning:

$$Volymen = \int_0^{ln2} \left(\pi 1^2 - \pi(e^x-1)^2\right)\,dx = \int_0^{ln2} \pi\left(2e^x - e^{2x}\right)\,dx = \pi\left[2e^x - \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 2} = \frac{\pi}{2}$$

Alternativt;

$$Volymen = \int_0^1 2\pi y \ln(1+y)\,dy = \pi\left[y^2\ln(1+y)\right]_0^1 - \pi\int_0^1 \frac{y^2}{1+y}\,dx =$$

$$= \pi \ln 2 - \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{y+1} + y - 1 \right) dy = \pi \ln 2 - \pi \left[\ln(1+y) + \frac{y^2}{2} - y \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Svar: Volymen är $\frac{\pi}{2}$ (v.e.)

6. Låt $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

(a) Bestäm tre elementära matriser E_1, E_2, E_3 som är sådana att $E_1 E_2 E_3 A = I$. (4p)

Lösning: Varje elementär matris motsvarar en elementär radoperation. Vi behöver därför identifiera tre radoperationer som överför A till identitetsmatrisen I.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \overset{rad1 \leftrightarrow rad2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{rad1 - 2 \cdot rad2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2} rad2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Byte av rad 1 och rad 2 motsvarar multiplikation med matrisen $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Addition av $-2 \cdot$rad 2 till rad 1 motsvarar multiplikation med matrisen $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Multiplikation av rad 2 med $\frac{1}{2}$ motsvarar multiplikation med matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

så

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{E_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{E_3} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I}$$

Svar: t.ex. $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) Antag att E_1, E_2, E_3 är sådana att $E_1 E_2 E_3 A = I$.
Vilken matris ger då produkten $E_3^{-1} E_2^{-1} E_1^{-1}$? (1p)

Lösning: $E_1 E_2 E_3 A = I \quad \Rightarrow \quad A = E_3^{-1} E_2^{-1} E_1^{-1}$

Svar: A

(c) Antag att E_1, E_2, E_3 är sådana att $E_1 E_2 E_3 A = I$.
Vilken matris ger då produkten $E_1 E_2 E_3$? (1p)

Lösning: $E_1 E_2 E_3 A = I \quad \Rightarrow \quad E_1 E_2 E_3 = A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

Svar: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

Vänd!

7. Det var jul hemma hos familjen Jansson när värmesystemet i deras hus plötsligen slutade fungera. Temperaturen utomhus var vid händelsen $-10°C$ medan det inne i huset var $20°C$ varmt. En timme efter händelsen hade temperaturen i huset sjunkit till $16°C$. Familjen bedömde att de kunde stanna kvar i huset så länge som temperaturen inte understeg $10°C$. När var det dags för familjen att packa väskorna och ge sig iväg till en varmare plats?

Tips: Det är rimligt att anta att temperatursänkningen per tidsenhet är proportionell mot skillnaden mellan inner- och yttertemperatur (Newtons avsvalningslag). Om $y(t)$ är temperaturen i huset t timmar efter att värmesystemet gått sönder så är i så fall

$$y' = k(y - (-10))$$

för någon proportionalitetskonstant k. (5p)

Lösning:

$$y' = k(y - (-10)) \quad \Leftrightarrow \quad y' - ky = 10k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(e^{-kt}y) = 10ke^{-kt} \quad \Leftrightarrow$$

$$e^{-kt}y = -10e^{-kt} + C \quad \Leftrightarrow \quad y = -10 + Ce^{kt}$$

Vidare får vi att;

$$\begin{cases} y(0) = 20 \\ y(1) = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20 = -10 + C \\ 16 = -10 + Ce^{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 30 \\ k = \ln \frac{26}{30} = \ln \frac{13}{15} \end{cases}$$

så $y = -10 + 30e^{t \ln \frac{13}{15}} = -10 + 30 \left(\frac{13}{15}\right)^t$.

Vi vill nu ta reda på vid vilken tidpunkt som $y(t) = 10$.

$$y(t) = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 10 = -10 + 30\left(\frac{13}{15}\right)^t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3} = \left(\frac{13}{15}\right)^t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{\ln \frac{2}{3}}{\ln \frac{13}{15}} \quad (\approx 2.83)$$

Svar: Familjen Jansson bör lämna huset efter $\dfrac{\ln \frac{2}{3}}{\ln \frac{13}{15}}$ timmar.

8. (a) Hur definieras e^{ix}, då x är ett reellt tal och i är den imaginära enheten? (1p)

(b) Skriv $2 - 2i$ på polär form (dvs. på formen $re^{i\theta}$). (2p)

Svar: t.ex. $2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

(c) Visa att $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$. (3p)

9. Visa att en kvadratisk matris A är inverterbar om och endast om $detA \neq 0$. (6p)

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a} \cdot \arctan\frac{x}{a}\ , \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{x+a}\,dx = \ln|x+a|.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|\ , \quad a \neq 0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2 \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|\right)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|$$

Uttryck i integranden	**Substituera**
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a \cdot sin(\theta), \quad x = a \cdot cos(\theta)$
$\sqrt{a^2+x^2}, \ \frac{1}{a^2+x^2}$	$x = a \cdot tan(\theta)$

Förskjutningsregeln

Om[1]

$$P(D)y = y'' + ay' + by, \text{ dvs } P(D) = D^2 + aD + b$$

så är

$$P(D)z(x)e^{\alpha x} = e^{\alpha x} P(D+\alpha) z(x)$$

[1] Det räcker att $P(D)$ är en linjär differentialoperator med konstanta koefficienter