LÖSNINGSFÖRSLAG
till tenta 8 april 2010

TMV036/TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B

---

1. (a) Bestäm standardmatrisen för den linjära avbildning $\mathbf{T}$ från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^2$ som är sådan att $\mathbf{T}(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_3, x_1)$ (2p)

Svar: Standardmatrisen för $\mathbf{T}$ är $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

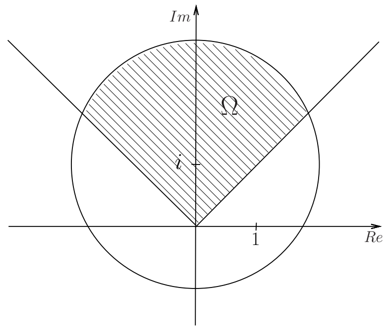
(b) Bestäm en bas för nollrummet till den linjära avbildningen i deluppgift (a) (Anm. nollrummet består av alla vektorer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ sådana att $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$) (3p)

Lösning: $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - x_3 & = & 0 \\ x_1 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$

Svar: $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ bildar en bas för nollrummet till $\mathbf{T}$

2. Skissa det område Ω i det komplexa talplanet som består av alla komplexa tal z för vilket $|z - i| \leq 2$ och $\frac{\pi}{4} \leq arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$ (3p)

Skiss:



3. Differentialekvationen $y' = xy$ kan betraktas både som separabel och som linjär av första ordningen. Lös differentialekvationen med

(a) lösningsmetod för separabla differentialekvationer (4p)

Lösning: $y' = xy \Leftrightarrow \dfrac{dy}{y} = xdx \Leftrightarrow \ln|y| = \dfrac{1}{2}x^2 + C_1 \Leftrightarrow y = Ce^{x^2/2}$

(b) lösningsmetod för linjära differentialekvationer av första ordningen (4p)

Lösning: $y' = xy \Leftrightarrow y' - xy = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d}{dx}\left(e^{-x^2/2}y\right) = 0 \Leftrightarrow e^{-x^2/2}y = C \Leftrightarrow y = Ce^{x^2/2}$

Svar: $y = Ce^{x^2/2}$

4. Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_4^\infty \frac{1}{x(1+\sqrt{x})}dx$ (6p)

(Tips: gör variabelbytet $t = \sqrt{x}$)

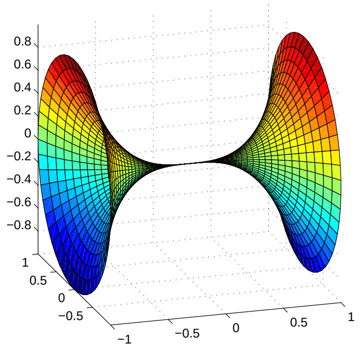
Lösning: $\displaystyle\int_4^\infty \frac{1}{x(1+\sqrt{x})}dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x} \\ dx = 2tdt \end{bmatrix} = \int_2^\infty \frac{2}{t(1+t)}dt =$

$$= 2\int_2^\infty \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right) dt = 2\left[\ln t - \ln(1+t)\right]_2^\infty = 2\left[\ln\frac{t}{1+t}\right]_2^\infty = 2 \cdot \ln\frac{3}{2}$$

Svar: $2 \cdot \ln\dfrac{3}{2}$

5. Låt S vara den yta som bildas då kurvan $y = x^3$, $-1 \le x \le 1$, roterar kring x-axeln. Skissa rotationsytan S och beräkna dess area. (5p)

Lösning:



$$Arean\ av\ S = 2\pi \int_{-1}^{1} |x^3| \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx = 4\pi \int_{0}^{1} x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx =$$

$$= 4\pi \left[\frac{2}{3 \cdot 36} (1 + 9x^4)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{27} \left(10^{3/2} - 1 \right)$$

Svar: $\frac{2\pi}{27} \left(10^{3/2} - 1 \right)$

6. För vilka värden på parametern p är följande tre vektorer linjärt beroende.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} p \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ p \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} p \\ p \\ 2 \end{bmatrix}$$ (4p)

Lösning: Vektorerna är linjärt beroende precis då $det([\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3]) = 0$

$$\begin{vmatrix} p & 2 & p \\ 1 & p & p \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = p(2p-p) - 2(2-2p) + p(1-2p) = -p^2 + 5p - 4 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

Svar: Då $p = 1$ eller $p = 4$

7. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm A^{-1} (4p)

Lösning:

$$[A\ I] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 12 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Svar: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 12 & -5 & -1 \\ -7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(b) Lös matrisekvationen $A^T XB = C$ (4p)

Lösning: $$X = (A^T)^{-1}CB^{-1} = (A^{-1})^T CB^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 12 & -7 \\ -2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 12 & -7 \\ -2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 19 \\ 4 & -8 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Svar: $X = \begin{bmatrix} -9 & 19 \\ 4 & -8 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

8. Låt A vara en matris av typ $m \times n$ och låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. Visa då att;

(a) $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$ (3p)

(b) $A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u})$ (3p)

Förklara noga varje steg i bevisen. Markera t.ex tydligt vilka andra räknelagar som används och var de kommer in i bevisen.

9. Visa den del av integralkalkylens huvudsats som säger att om $G(x)$ är någon primitiv (antiderivata) till en kontinuerlig funktion $f(x)$ på ett intervall $[a, b]$ så är;

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) \qquad \text{(5p)}$$

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\cdot \arctan\frac{x}{a}\,, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{x+a}\,dx = \ln|x+a|.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|\,, \quad a \neq 0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|\right)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|$$

Uttryck i integranden	**Substituera**
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\cdot sin(\theta),\;\; x = a\cdot cos(\theta)$
$\sqrt{a^2+x^2},\;\; \dfrac{1}{a^2+x^2}$	$x = a\cdot tan(\theta)$

Förskjutningsregeln

Om[1]

$$P(D)y = y'' + ay' + by, \text{ dvs } P(D) = D^2 + aD + b$$

så är

$$P(D)z(x)e^{\alpha x} = e^{\alpha x}P(D+\alpha)z(x)$$

[1] Det räcker att $P(D)$ är en linjär differentialoperator med konstanta koefficienter