LÖSNINGSFÖRSLAG
till tenta 23 aug 2010

TMV036/TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B

---

1. Beräkna $\det(B^2)$ då $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4p)

Lösning:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 6 + 15 = 8$$

$$\Rightarrow \quad \det(B^2) = (\det(B))^2 = 8^2 = 64$$

Svar: 64

2. Bestäm en bas för kolonnrummet $\operatorname{Col} A$ och ange rummets dimension då

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$ (4p)

Lösning:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -1 & -4 \\ 0 & -10 & -10 & -5 & -5 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & -1 & -4 \\ 0 & -10 & -10 & -5 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & -15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi avläser att pivotelementen finns i kolonn 1,2 och 4. Motsvarande kolonnvektorer i A bildar således en bas för $\operatorname{Col} A$, vars dimension alltså är 3.

Svar: $\dim(\operatorname{Col} A) = 3$ och en bas för $\operatorname{Col} A$ ges t.ex. av följande tre vektorer;

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Skriv $\dfrac{2+3i}{(1+i)(3-2i)}$ på formen $a + bi$ (i är den imaginära enheten) (2p)

Lösning: $\dfrac{2+3i}{(1+i)(3-2i)} = \dfrac{2+3i}{5+i} = \dfrac{(2+3i)(5-i)}{(5+i)(5-i)} = \dfrac{13+13i}{26} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

Svar: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

4. Bestäm alla lösningar $y(t)$ till differentialekvationen $e^t y'(t) = ty(t)$ (4p)

Lösning: Differentialekvationen är båda separabel och linjär av första ordningen så vi har två olika metoder att tillgå. Låt oss börja med att lösa den som en separabel ekv;

$$e^t y'(t) = ty(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = te^{-t}dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln|y| = -(1+t)e^{-t} + C \quad \Leftrightarrow \quad y = De^{-(1+t)e^{-t}}$$

Om vi istället betraktar ekvationen som linjär av första ordningen så skriver vi den på formen;

$$y'(t) - te^{-t}y(t) = 0$$

En integrerande faktor är $e^{(1+t)e^{-t}}$ så;

$$y'(t) - te^{-t}y(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(e^{(1+t)e^{-t}}y(t)\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{(1+t)e^{-t}}y(t) = D \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = De^{-(1+t)e^{-t}}$$

Svar: $y(t) = De^{-(1+t)e^{-t}}$

Till uppgifterna 5–9 skall du lämna in fullständiga lösningar.

5. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y'' - y' - 2y = 2 + 6e^{2x} \\ y(0) = 2 \ , \ y'(0) = 5 \end{cases}$ (6p)

Lösning: Vi börjar med att finna rötterna till den karakteristiska ekvationen;

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1 \pm 3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad r = 2 \text{ eller } r = -1$$

så homogenlösningarna har formen;

$$y_h(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$$

Som partikulärlösning ansätter vi $y_p(x) = A + Bxe^{2x}$. Insättning i differentialekvationens VL ger;

$$y_p'' - y_p' - 2y_p = B(4 + 4x)e^{2x} - B(1 + 2x)e^{2x} - 2A - 2Bxe^{2x} = -2A + 3Be^{2x}$$

För att y_p skall vara en lösning på differentialekvationen måste vi således ha $-2A = 2$ och $3B = 6$, dvs $A = -1$ och $B = 2$. En partikulärlösning är således $y_p(x) = -1 + 2xe^{2x}$. Den allmänna lösningen till differentialekvationen har således formen;

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} - 1 + 2xe^{2x}$$

Begynnelsevillkoren ger sedan att;

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 - 1 = 2 \\ y'(0) = 2C_1 - C_2 + 2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ 2C_1 - C_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3C_1 = 6 \\ 3C_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

Svar: $y(x) = 2(1 + x)e^{2x} + e^{-x} - 1$

6. Beräkna $\displaystyle\int \frac{x^3(x-2)}{(x^2-4)(x^2+2)}\,dx$ (6p)

Lösning: Notera först att;

$$\frac{x^3(x-2)}{(x^2-4)(x^2+2)} = \frac{x^3}{(x+2)(x^2+2)} =$$

$$= \frac{x^3}{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} = 1 - \frac{2x^2 + 2x + 4}{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} = 1 - \frac{2x^2 + 2x + 4}{(x+2)(x^2+2)}$$

Partialbråksuppdelning ger sedan att;

$$\frac{2x^2 + 2x + 4}{(x+2)(x^2+2)} = \frac{\frac{4}{3}}{x+2} + \frac{\frac{2}{3}(x+1)}{x^2+2}$$

så

$$\int \frac{x^3(x-2)}{(x^2-4)(x^2+2)}\,dx = \int \left(1 - \frac{\frac{4}{3}}{x+2} - \frac{\frac{2}{3}(x+1)}{x^2+2}\right) dx =$$

$$= \int \left(1 - \frac{\frac{4}{3}}{x+2} - \frac{1}{3}\frac{2x}{x^2+2} - \frac{2}{3}\frac{1}{x^2+2}\right) dx =$$

$$= x - \frac{4}{3}\ln|x+2| - \frac{1}{3}\ln(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{3}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

Svar: $x - \frac{4}{3}\ln|x+2| - \frac{1}{3}\ln(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{3}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C$

7. Lös följande ekvationssystem för alla värden på de reella parametrarna a och b sådana att lösningar existerar

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & az & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & a \\ ax & + & ay & + & bz & = & a \end{array}\right.$$ (7p)

Lösning: Radelimination på systemets totalmatris M ger;

$$M = \begin{bmatrix} a & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ a & a & b & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & a & 1 \\ a & a & b & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 0 & 1-a^2 \\ 0 & 0 & b-a & a-a^2 \end{bmatrix} \overset{a\neq 1}{\underset{\downarrow}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & b-a & a-a^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & b-a & a-a^2 \end{bmatrix} \overset{b\neq a}{\underset{\downarrow}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-a^2}{b-a} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a^2-b}{b-a} \\ 0 & 1 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-a^2}{b-a} \end{bmatrix}$$

För att bestämma lösningarna så måste vi särskilja olika fall;

Fall 1: $a \neq 1, b \neq a$
I detta fall framgår det direkt av ovan att systemet har den entydiga lösningen

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & \frac{a^2-b}{b-a} \\ y & = & 1+a \\ z & = & \frac{a-a^2}{b-a} \end{array}\right.$$

Fall 2: $a \neq 1, b = a$
Av ovan framgår att;

$$M \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & a-a^2 \end{bmatrix} \overset{a\neq 0}{\underset{\downarrow}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Under Fall 2 får vi således två delfall;

Fall 2a: $a \neq 0, a \neq 1, b = a$
Av ovan framgår att ekvationssystemet saknar lösning i detta fall.

Fall 2b: $a = b = 0$
Av ovan framgår att;

$$M \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I detta fall har systemet oändligt många lösningar;

$$\begin{cases} x &= -1-t \\ y &= 1 \\ z &= t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Fall 3: $a = 1, b \neq 1$
Av ovan framgår att;

$$M \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Även i detta fall har systemet oändligt många lösningar;

$$\begin{cases} x &= 1-t \\ y &= t \\ z &= 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Fall 4: $a = 1, b = 1$
Av ovan framgår att;

$$M \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I detta fall har systemet till och med en tvådimensionell lösningsskara;

$$\begin{cases} x &= 1-t-s \\ y &= t \\ z &= s \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Svar: se lösningarna i de olika fallen ovan.

8. (a) Formulera och bevisa satsen om variabelsubstitution i bestämda integraler (6p)

(b) Beräkna $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$ (3p)

Lösning:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{bmatrix} = -\int_1^0 \frac{1}{1+t^2} dt = -\left[\arctan t\right]_1^0 = \frac{\pi}{4}$$

Svar: $\frac{\pi}{4}$

9. (a) Visa att $(AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x})$, för alla matriser A, B och vektorer $\mathbf{x}$ sådana att de involverade produkterna är definierade (4p)

(b) Använd resultatet i (a) för att visa att $(AB)C = A(BC)$, för alla matriser A, B och C sådana att de involverade produkterna är definierade (3p)

(c) Vad kallas matrisegenskapen i deluppgift (b) (1p)

Svar: Associativa lagen för matrismultiplikation