LÖSNINGSFÖRSLAG
till tenta 28 april 2011

TMV036/TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B

---

1. Låt $A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

(a) Beräkna $det\,A$ (2p)

Lösning: $det\,A = \frac{1}{25}\underbrace{\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}_{=-25} = -1$

Svar: $det\,A = -1$

(b) Beräkna A^{-1} (2p)

Lösning: $A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

Svar: $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad (= A)$

(c) Låt T vara den linjära avbildning i planet vars standardmatris är A. Avbildningen T motsvarar geometriskt en spegling av punkter i en viss linje genom origo. Ange en ekvation som beskriver denna linje. (2p)

Lösning: Låt $\mathbf{u}$ vara ortsvektorn för en godtycklig punkt i planet. Eftersom T motsvarar spegling i en linje genom origo så kommer summan av $\mathbf{u}$ och motsvarande speglade vektor $T(\mathbf{u})$ ge ortsvektorn för en punkt på linjen. T.ex. har vi

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

så $(\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$ är en punkt på linjen. Eftersom linjen går genom origo så kan linjen beskrivas med ekvationen $\frac{y}{x} = \frac{4/5}{2/5} \Leftrightarrow y = 2x$

Svar: $y = 2x$

2. Låt $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(a) Bestäm alla lösningar på vektorekvationen $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}$ (4p)

Lösning: Ekvationen kan skrivas på följande matrisform;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

vilket vi t.ex. kan lösa genom radreducering på ekvationens totalmatris;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ur den reducerade matrisen avläser vi att;

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad s \in \mathbb{R}$$

Svar: Alla lösningar är på formen $x_1 = -1 - 2s, x_2 = 1 + s, x_3 = s$, där $s \in \mathbb{R}$

(b) Är vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ linjärt beroende? (Motivera ditt svar!) (2p)

Svar: Ja, eftersom vi fick oändligt med lösningar på ekvationen i deluppgift (a). Om $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ resp. $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ är två olika lösningar på ekvationen $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}$ så följer att;

$$(\hat{x}_1 - \tilde{x}_1)\mathbf{v}_1 + (\hat{x}_2 - \tilde{x}_2)\mathbf{v}_2 + (\hat{x}_3 - \tilde{x}_3)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

så det finns en icke-trivial linjärkombination av vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ som ger nollvektorn.

3. Använd partiell integration för att beräkna $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$. (3p)

Lösning:

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \underbrace{\left[\frac{-\ln x}{x}\right]_1^\infty}_{=0} + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^\infty = 1$$

Svar: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = 1$

4. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} xy' = y(y+1) \\ y(1) = 1 \end{cases}$.
För full poäng på uppgiften skall svaret ges på formen $y = f(x)$. (5p)

Lösning: Differentialekvationen är separabel ty;

$$xy' = y(y+1) \;\Leftrightarrow\; \frac{dy}{y(y+1)} = \frac{dx}{x}$$

Integration av båda led ger att;

$$\ln|x| = \int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{1}{y(y+1)}\,dy = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right) dy = \ln|y| - \ln|y+1| + D$$

Detta samband kan skrivas $x = C\dfrac{y}{y+1}$ (med $C = \pm e^D$).
Bivillkoret $y(1) = 1$ ger sedan att $C = 2$ så $x = \dfrac{2y}{y+1}$.
En omskrivning ger slutligen att;

$$x = \frac{2y}{y+1} \;\Leftrightarrow\; x(y+1) = 2y \;\Leftrightarrow\; x = (2-x)y \;\Leftrightarrow\; y = \frac{x}{2-x}$$

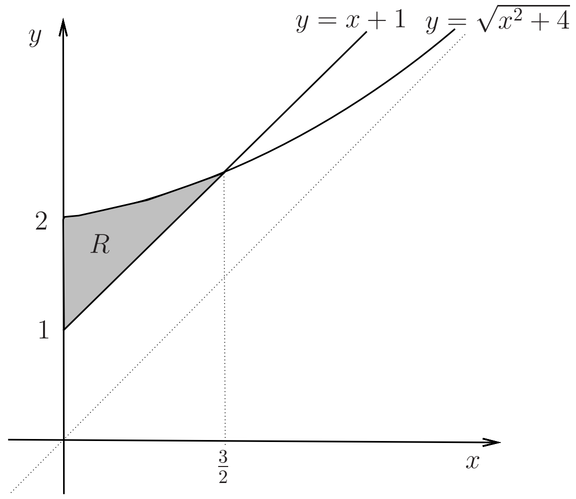
Svar: $y = \dfrac{x}{2-x}$

5. Låt R vara det område i xy-planet som begränsas av kurvan $y = \sqrt{x^2+4}$ samt linjerna $y = x+1$ och $x = 0$. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området roterar kring y-axeln. (5p)

Lösning: Låt oss först beräkna skärningspunkten mellan kurvan $y = \sqrt{x^2+4}$ och linjen $y = x+1$;

$$\sqrt{x^2+4} = x+1 \;\Rightarrow\; x^2+4 = (x+1)^2 \;\Leftrightarrow\; 4 = 2x+1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3}{2}$$

så området R har följande utseende;



Rotationsvolymen ges av;

$$2\pi \int_0^{3/2} x\left(\sqrt{x^2+4}-(x+1)\right)\,dx = 2\pi\left[\frac{1}{3}(x^2+4)^{3/2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_0^{3/2} = \frac{7\pi}{12}$$

Svar: $\frac{7\pi}{12}$ *(v.e.)*

6. Lös integralekvationen $y(x) = 1 - \dfrac{1}{x} - 2\displaystyle\int_1^x \frac{y(t)}{t}\,dt$ (5p)

Lösning: Deriverar vi båda led så får vi;

$$y'(x) = \frac{1}{x^2} - 2\frac{y(x)}{x}$$

vilket är en linjär differentialekvation av första ordningen.
Flyttar vi över alla y-termerna till VL så får vi $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{1}{x^2}$
En integrerande faktor är $e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = x^2$ så ekvationen kan skrivas $\left(x^2y\right)' = 1$, vilket ger att $x^2y = x + C \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}$ Insättning av $x = 1$ i den ursprungliga integralekvationen ger att $y(1) = 0$, vilket betyder att $C = -1$ i den allmänna lösningen.

Svar: $y(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$

7. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(a) Bestäm en vektor $\mathbf{u}$ som <u>inte</u> tillhör kolonnrummet $Col\,A$.
(Motivera ditt svar!) (1p)

Lösning: Eftersom alla kolonnerna i A har 0 på sista raden så kommer alla linjärkombinationer av kolonnerna i A också ha en nolla på sista raden. De vektorer som inte har en nolla på sista raden tillhör alltså inte kolonnrummet till A.

Svar: T.ex. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

(b) Bestäm en vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ i nollrummet $Nul\,A$.
(Motivera ditt svar!) (2p)

Lösning: Elementära radoperationer ger att;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

så ekvationen $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ har lösningarna $\mathbf{v} = s \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

Svar: T.ex. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$

(c) Visa att nollvektorn $\mathbf{0}$ är den enda vektorn i $\mathbb{R}^3$ som tillhör både nollrummet $Nul\,A$ och kolonnrummet $Col\,A$. (3p)

Lösning: Pivotkolonnerna $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$ i A spänner upp $Col\,A$ och i deluppgift (b) såg vi att $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ spänner upp $Nul\,A$. Om $\mathbf{v}$ tillhör både $Col\,A$ och $Nul\,A$ så finns det således x_1, x_2, x_3 sådana att;

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{v} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Speciellt är alltså;

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \qquad (*)$$

Men vektorerna $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ är linjärt oberoende ty;

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

så ekvationen (*) har endast den triviala lösningen $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$, vilket betyder att $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Följdaktligen är nollvektorn den enda vektorn i både $Col\,A$ och $Nul\,A$.

8. Visa att en kvadratisk $n \times n$-matris A är inverterbar om och endast om A är radekvivalent med identitetsmatrisen I_n. (5p)

Bevis: Se kursboken eller föreläsningsanteckningar.

9. (a) Visa att den allmänna lösningen till en linjär homogen differentialekvation av andra ordningen $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$ kan skrivas $y(t) = (At + B)e^{r_1 t}$, då r_1 är en dubbelrot till den karakteristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$. (5p)

Bevis: Se kursboken eller föreläsningsanteckningar.

(b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' + 6y' + 9y = 9\sin 3t$. (4p)

Lösning: Karakteristiska ekvationen $r^2 + 6r + 9 = 0 \Leftrightarrow (r+3)^2 = 0$ har dubbelroten $r_1 = -3$, så ekvationens homogenlösningar har formen $y_h = (At + B)e^{-3t}$. Som partikulärlösning ansätter vi $y_p = C_1 \sin 3t + C_2 \cos 3t$. Insättning i differentialekvationens vänsterled ger;

$$y_p'' + 6y_p' + 9y_p =$$
$$= -9C_1 \sin 3t - 9C_2 \cos 3t + 6(3C_1 \cos 3t - 3C_2 \sin 3t) + 9(C_1 \sin 3t + C_2 \cos 3t) =$$
$$= 18C_1 \cos 3t - 18C_2 \sin 3t$$

För att erhålla differentialekvationens högerled måste därför $C_1 = 0$ och $C_2 = \frac{-1}{2}$, vilket ger oss partikulärlösningen $y_p = \frac{-1}{2} \cos 3t$. Den allmänna lösningen till differentialekvationen får vi slutligen genom att addera homogenlösningarna till denna partikulärlösning.

Svar: $y = (At + B)e^{-3t} - \dfrac{1}{2} \cos 3t$