Matematik
Chalmers tekniska högskola 2012-08-27 kl. 14:00 - 18:00.

Tentamen TMV036 Analys och linjär algebra K, Kf, Bt, del B

Telefonvakt: Hossein Raufi, telefon 0703-088304 Plats: V
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.
Betygsgränser: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.
Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

---

1. Låt $\boldsymbol{A}$ vara en $n \times n$ matris och låt $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{b}$ vara $n \times 1$ vektorer. Är följande påstående sant eller falskt? Visa ditt svar. (4p)
`Om systemet` $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ `har mer än en lösning, så har också systemet` $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ `mer än en lösning.`

2. Låt
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
   (a) Bestäm volymen av den parallellepiped som spänns upp kolumnvektorerna i $\boldsymbol{A}$. (2p)
   (b) Är kolumnvektorerna i $\boldsymbol{A}$ linjärt oberoende? Motivera ditt svar. (1p)
   (c) Bestäm alla lösningar till (3p)
$$\boldsymbol{AA^T x} = \boldsymbol{b}$$
   där $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.
   (d) Låt $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{b}$ vara samma som i (c)-uppgiften. Gäller det att någon av kolumnvektorerna i $\boldsymbol{bb^T}$ tillhör nollrummet till $\boldsymbol{A}$? Motivera ditt svar. (2p)

3. Om man beräknat ett värde på `Q` med följande matlabsekvens (3p)

```
x = 1:4;
Q = sum(1./x);
```

gäller det då att `Q` $> \int_1^5 \frac{1}{x} dx$? Motivera ditt svar.

4. Differentialekvationen $y' = xy$ kan både betraktas som separabel och som linjär av första ordningen. Lös differentialekvationen med (8p)
   (a) lösningsmetod för separabla differentialekvationer.
   (b) lösningsmetod för linjära differentialekvationer av första ordningen.

5. (a) Beräkna (6p)
$$\int_2^3 x^3 e^{x^2} dx$$
   (b) Beräkna volymen av den kropp som uppstår då funktionen (5p)
$$f(x) = 1 - (x-2)^2, 1 \leq x \leq 3$$
   roteras kring y-axeln.

6. Bestäm alla lösningar till

$$y'' + 3y' + 2y = te^{-t}$$

(6p)

7. Visa att en kvadratisk $n \times n$ matris $\boldsymbol{A}$ är inverterbar om och endast om $\boldsymbol{A}$ är radekvivalent med identitetsmatrisen $\boldsymbol{I_n}$. (5p)

8. Formulera och bevisa medelvärdessatsen för integraler. (5p)

Lycka till !

Lösningsförslag

Tentamen TMV036 Analys och linjär algebra K, Kf, Bt, del B

Telefonvakt: Plats: V
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.
Betygsgränser: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.
Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

---

1. Låt $\boldsymbol{A}$ vara en $n \times n$ matris och låt $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{b}$ vara $n \times 1$ vektorer. Är följande påstående sant eller falskt? Visa ditt svar. (4p)
   `Om systemet` $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ `har mer än en lösning, så har också systemet` $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ `mer än en lösning.`

   Sant, ty låt $x_1 \neq x_2$ vara två lösningar till $Ax = b$, då gäller

$$0 = Ax_1 - Ax_2 = A(x_1 - x_2)$$

   Dvs $x_1 - x_2 \neq 0$ är en lösning till $Ax = 0$.

2. Låt

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Bestäm volymen av den parallellepiped som spänns upp kolumnvektorerna i $\boldsymbol{A}$. (2p)

   (b) Är kolumnvektorerna i $\boldsymbol{A}$ linjärt oberoende? Motivera ditt svar. (1p)

   (c) Bestäm alla lösningar till (3p)

$$\boldsymbol{AA^T x} = \boldsymbol{b}$$

   där $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.

   (d) Låt $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{b}$ vara samma som i (c)-uppgiften. Gäller det att någon av kolumnvektorerna i $\boldsymbol{bb^T}$ tillhör nollrummet till $\boldsymbol{A}$? Motivera ditt svar. (2p)

(a)

$$|det(A)| = |det(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}) + det(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix})| = |1*2-2*1+(-1)*2-2*1| = 4$$

(b) Ja, ty determinanten är nollskild.

(c)

$$AA^Tx = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Gauseliminering av de utökade matrisen ger $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$\boldsymbol{bb^T} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Kolumnerna i A är linjärt oberoende, dvs endast 0-vektorn ingår i nollrummet till A, dvs andra kolumnen i bb^T.

3. Om man beräknat ett värde på `Q` med följande matlabsekvens (3p)

```
x = 1:4;
Q = sum(1./x);
```

gäller det då att `Q` $> \int_1^5 \frac{1}{x} dx$? Motivera ditt svar.

I matlab-summan har man använt vänster rektangelregel med steglängd 1, och eftersom funktionen $\frac{1}{x}$ är avtagande på intervallet [1,4] gäller att $Q > \int_1^5 \frac{1}{x} dx$.

4. Differentialekvationen $y' = xy$ kan både betraktas som separabel och som linjär av första ordningen. Lös differentialekvationen med (8p)

   (a) lösningsmetod för separabla differentialekvationer.

   (b) lösningsmetod för linjära differentialekvationer av första ordningen.

(a) lösningsmetod för separabla differentialekvationer.

$$y' = xy \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = xdx \Leftrightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C_1 \Leftrightarrow y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

(b) lösningsmetod för linjära differentialekvationer av första ordningen.

$$y' = xy \Leftrightarrow y' - xy = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(e^{\frac{-x^2}{2}} y) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{-x^2}{2}} y = C \Leftrightarrow y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

5. (a) Beräkna (6p)

$$\int_2^3 x^3 e^{x^2} dx$$

   (b) Beräkna volymen av den kropp som uppstår då funktionen (5p)

$$f(x) = 1 - (x-2)^2, 1 \leq x \leq 3$$

   roteras kring y-axeln.

(a)

$$\begin{aligned} \int_2^3 x^3 e^{x^2} dx &= \begin{bmatrix} x^2 = t, x > 0 \\ 2xdx = dt \\ x = 2 \Leftrightarrow t = 4 \\ x = 3 \Leftrightarrow t = 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \int_4^9 te^t dt = \frac{1}{2}(\left[te^t\right]_4^9 - \int_4^9 e^t dt) \\ &= \frac{1}{2}(9e^9 - 4e^4 - \left[e^t\right]_4^9) = \frac{1}{2}(8e^9 - 3e^4) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} Volymen &= \int_1^3 2\pi x(1-(x-2)^2)dx = 2\pi \int_1^3 (-x^3 + 4x^4 - 3x)dx \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_1^3 = \frac{16\pi}{3} \end{aligned}$$

Eftersom det karakteristiska polynomet

$$p(r) = r^2 + 3r + 2 = (r+1)(r+2)$$

har nollställena $r_1 = -1$, $r_2 = -2$ *har motsvarande homogena ekvation lösningen*

$$y_h = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

För att finna partikulärlösning inför vi funktionen $z = z(t)$, *dvs låt*

$$y = z e^{-t}$$

Vi får

$$\begin{aligned} y' &= e^{-t}(z' - z) \\ y'' &= e^{-t}(z'' - 2z' + z) \end{aligned}$$

Insättning ger

$$e^{-t}(z'' + z') = te^{-t}$$

dvs

$$z'' + z' = t.$$

Ansätt $z = t(At + B) = At^2 + Bt$. *Vi får* $z' = 2At + B$ *och* $z'' = 2A$.
Insättning ger $2A + (2At + B) = t \Leftrightarrow 2At + (2A + B) = t$ *Identifiera koefficienterna:*

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases}$$

dvs $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$ *och alltså* $z = \frac{1}{2}t^2 - t$. *Partikulärlösning* $y_p = (\frac{1}{2}t^2 - t)e^{-t}$.
Fullständig lösning:$y = y_h + y_p = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + (\frac{1}{2}t^2 - t)e^{-t}$

7. Visa att en kvadratisk $n \times n$ matris $\boldsymbol{A}$ är inverterbar om och endast om $\boldsymbol{A}$ är radekvivalent med identitetsmatrisen $\boldsymbol{I_n}$. (5p)

   Se litteraturen

8. Formulera och bevisa medelvärdessatsen för integraler. (5p)
   Se litteraturen

Lycka till !