# TMV036b – Analys och Linjär Algebra B

**Satser med bevis 2010**

*Sammanställt av: David Frisk, 2013*

David Frisk

# Bevis till ALA B 2010

1. Medelvärdessatsen för integraler
2. Integralkalkylens huvudsats
3. Variabelsubstitution
4. Ekvivalenta påståenden om $Ax=b$
5. Linjaritet $A(u+v) = Au + Av$, $A(ru) = rAu$
6. Karakterisering av lösningarna till inhomogena linjära system
7. Standardmatris för linjära avbildningar
8. Associativa lagen för matrisprodukt
9. Inversen till produkten $AB$
10. Att matrisen $A$ är radekvivalent med identitetsmatrisen om $A$ är inverterbar
11. Inversen till $A$ finns när $\det(A) \neq 0$
12. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
13. Om lösningarna till homogena diffekvationer med konstanta koefficienter
14. Formeln $e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}$ och de Moivres formel.

## 1 Medelvärdessatsen för integraler

**Sats** Om $f$ är kontinuerlig på $[a,b]$ så existerar en punkt $c \in [a,b]$ så att

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c) \quad \text{, det vill säga} \quad \int_a^b (f(x)-f(c))\,dx = 0$$

**Bevis** Eftersom $f$ är kontinuerlig på $[a,b]$ så existerar punkter $l$ och $u$ i $[a,b]$ sådana att $\underbrace{f(l)}_{\text{min}, m} \leq f(x) \leq \underbrace{f(u)}_{\text{max}, M}$, för alla $x$ i $[a,b]$.

Detta ger oss att:

$$\underbrace{m(b-a)}_{\text{undersumma}} \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \underbrace{M(b-a)}_{\text{översumma}} \qquad \text{(1 intervall)}$$

Satsen om mellanliggande värden ger då att det finns något $c$ mellan $l$ och $u$ (därmed i $[a,b]$) så att

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$ , vilket skulle bevisas

## 2 Integralkalkylens huvudsats

**Sats** Antag att $f$ är kontinuerlig på ett intervall $I$, och att $a \in I$. Vi kan då definiera funktionen $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

(I) Funktionen $F$ är deriverbar på $I$, och $F'(x) = f(x)$, dvs $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$

(II) Om $G$ är någon primitiv funktion till $f$ på $I$, så är

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a), \quad b \in I.$$

**Bevis** (I) $F'(x) = f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \cdot \cancel{h} \cdot f(c_h)$, för något $c_h \in [x, x+h]$,

$= f(x)$, ty $f$ är kontinuerlig.

(II) Om $G'(x) = f(x)$ så är $G(x) = F(x) - C$ för ngn konstant $C$.

Så $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) = G(x) + C$ (*). Speciellt med $x = a$ får vi $0 = G(a) + C \Rightarrow C = -G(a)$.

Om vi nu sätter in $x = b$ i (*) så får vi:

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$$ , vilket skulle bevisas.

## 3. Variabelsubstitution

**Sats** Om $g$ är deriverbar på $[a,b]$ och är kontinuerlig på bilden av $g$ (dvs $g([a,b])$), så är:

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

**Bevis** Låt $F$ vara primitiv till $f$.

$$\frac{d}{dx}\Big(F(g(x))\Big) = F'(g(x))\cdot g'(x) = f(g(x))\cdot g'(x), \quad \text{så}$$

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \Big[F(g(x))\Big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \Big[F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du, \text{ VSB.}$$

## 4 Ekvivalenta påståenden om $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

**Sats** Antag att $A$ är en $m\times n$-matris. Då är följande påståenden ekvivalenta:

(a) För varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ är systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbart

(b) Varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ är en linjärkombination av kolonnerna i $A$

(c) Kolonnerna i $A$ spänner $\mathbb{R}^m$, dvs $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots \mathbf{a}_n\} = \mathbb{R}^m$

(d) $A$ har en pivotplats i varje rad.

**Bevis** Att (a), (b) och (c) är ekvivalenta följer direkt av definitionerna.

Att (a) och (d) är ekvivalenta visas genom att överföra systemets totalmatris på reducerad form $[A \;\; \mathbf{b}] \sim [U \;\; \mathbf{d}]$

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbart för varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $U\mathbf{x} = \mathbf{d}$ är lösbart för varje $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $U$ har ingen nollrad, vilket innebär att $A$ har pivotplats i varje rad (d).

## 5 Linjaritet $A(\mathbb{u}+\mathbb{v}) = A\mathbb{u} + A\mathbb{v}$, $A(r\mathbb{u}) = r \cdot A \cdot \mathbb{u}$

**Sats** Om $c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{u}, \mathbb{v} \in \mathbb{R}^n$, och $A$ är en $m \times n$-matris, så är:

(a) $A(\mathbb{u}+\mathbb{v}) = A\mathbb{u} + A\mathbb{v}$

(b) $A(c\mathbb{u}) = c(A\mathbb{u})$

**Bevis**

(a) $A(\mathbb{u}+\mathbb{v}) = (u_1+v_1)\mathbb{a}_1 + \dots + (u_n+v_n)\mathbb{a}_n =$

$= (u_1\mathbb{a}_1 + \dots + u_n\mathbb{a}_n) + (v_1\mathbb{a}_1 + \dots + v_n\mathbb{a}_n) = A\mathbb{u} + A\mathbb{v}$

(b) $A(c\mathbb{u}) = (cu_1)\mathbb{a}_1 + \dots + (cu_n)\mathbb{a}_n = c(u_1\mathbb{a}_1) + \dots + c(u_n\mathbb{a}_n) =$

$= c(u_1\mathbb{a}_1 + \dots + u_n\mathbb{a}_n) = c(A\mathbb{u})$

## 6 Karakterisering av lösningarna till inhomogena linjära system

**Sats** Antag att $\mathbb{v}_p$ är en lösning till systemet $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$. Då består systemets lösningsmängd av alla vektorer som har formen $\mathbb{w} = \mathbb{v}_p + \mathbb{v}_n$, där $\mathbb{v}_n$ är en lösning på motsvarende homogena system $A\mathbb{x} = \mathbb{0}$

**Bevis** Om $\mathbb{w} = \mathbb{v}_p + \mathbb{v}_n$ för någon homogen lösning $\mathbb{v}_n$, dvs $A\mathbb{v}_n = \mathbb{0}$, så är

$A\mathbb{w} = A(\mathbb{v}_p + \mathbb{v}_n) = A\mathbb{v}_p + A\mathbb{v}_n = \{\text{Enl. räkneregel}\} = \mathbb{b} + \mathbb{0} = \mathbb{b}$

$\therefore$ Alla vektorer på formen $\mathbb{v}_p + \mathbb{v}_n$ är lösninger till systemet $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$.

Antag att $\mathbb{u}$ är en godtycklig lösning till $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$. Då är $A(\mathbb{u} - \mathbb{v}_p) =$

$= \{\text{Enl. räkneregel}\}\ A\mathbb{u} - A\mathbb{v}_p = \mathbb{b} - \mathbb{b} = \mathbb{0}$

D.v.s $\mathbb{u} - \mathbb{v}_p$ är en homogenlösning. Sätter vi $\mathbb{v}_n = \mathbb{u} - \mathbb{v}_p$ får vi

$\mathbb{u} = \mathbb{v}_p + \mathbb{v}_n$

$\therefore$ Alla lösninger till systemet $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ har formen $\mathbb{v}_p + \mathbb{v}_n$, VSB.

## 7.[2] Standardmatris för linjära avbildningar

**Sats** Om den linjära transformationen $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, så finns en entydigt bestämd matris $A$ sådan att:

$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

**Bevis** För en godtycklig vektor i $\mathbb{R}^n$ gäller att

$T(\mathbf{x}) = T(x_1\mathbf{e}_1 + \dots x_n\mathbf{e}_n) = x_1 T(\mathbf{e}_1) + \dots + x_n T(\mathbf{e}_n) =$

$= [T(\mathbf{e}_1) \dots T(\mathbf{e}_n)]\mathbf{x} = A\mathbf{x}$. Därför existerar $A$.

Antag att $B = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_n]$ är en matris så att $T(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ för varje $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Då gäller speciellt:

$T(\mathbf{e}_i) = B\mathbf{e}_i = \mathbf{b}_i$, för $i = 1, 2 \dots n$. Så $B = A$. Därför är $A$ entydig.

## 8. Associativa lagen för matrisprodukt

**Sats** Låt $A$ vara en $m \times n$-matris, och låt $B$ och $C$ vara av sådana storlekar att följande produkt är definierad: $A(BC) = (AB)C$

**Bevis** $C = [\mathbf{c}_1 \dots \mathbf{c}_n]$. Enligt definitionen av matrismultiplikation:

$BC = [B\mathbf{c}_1 \dots B\mathbf{c}_n]$ och $A(BC) = [A(B\mathbf{c}_1) \dots A(B\mathbf{c}_n)]$.

Vi söker nu en matris som transformerar en vektor $\mathbf{x}$ till $A(B\mathbf{x})$.

$B\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 x_1 + \dots + \mathbf{b}_n x_n$. Då:

$A(B\mathbf{x}) = A(\mathbf{b}_1 x_1) + \dots + A(\mathbf{b}_n x_n) = A\mathbf{b}_1 x_1 + \dots + A\mathbf{b}_n x_n$

Vilket är en linjärkombination av vektorerna $A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, \dots, A\mathbf{b}_n$ multiplicerade med $\mathbf{x}$, så:

$A(B\mathbf{x}) = (A\mathbf{b}_1 + A\mathbf{b}_2 + \dots + A\mathbf{b}_n)\mathbf{x} = (AB)\mathbf{x}$

$AB$ är då matrisen vi söker, och då är alltså:

$A(BC) = [A(B\mathbf{c}_1) \dots A(B\mathbf{c}_n)] = [(AB)\mathbf{c}_1 \dots (AB)\mathbf{c}_n] = (AB)C$, V.S.B

## 9. Inversen till produkten AB

**Sats** Om $A$ och $B$ är inverterbara $n \times n$ matriser, då är $AB$ också interterbar och inverson till $AB$ är produkten av inverserna till $B$ och $A$, dvs $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

**Bevis** $(AB)^{-1}$ har egenskapen att $(AB)(AB)^{-1} = (AB)^{-1}(AB) = I_n$

Multiplikation med $B^{-1}A^{-1}$ från höger ger:

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

På samma sätt från vänster

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

Alltså är $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, VSB.

## 10. Framtagning av matrisinvers

**Sats** Låt $A$ vara en $n \times n$ matris. Då är $A$ inverterbar om och endast om $A \sim I_n$. De radoperationer som transformerar $A$ till $I_n$ transformerar även $I_n$ till $A^{-1}$.

**Bevis** Antag att $A$ är inverterbar. Då säger en sats att $Ax = b$ har en lösning för varje $b$, en annan sats säger då att $A$ har en pivotplats i varje rad. Eftersom $A$ är kvadratisk så måste pivotplatserna ligga på diagonalen, vilket imebär att den reducerade trappstegsmatrisen av $A$ är $I_n$, alltså: $A \sim I_n$

Detta imebär att det existerar elementära matriser $E_p, E_{p-1} \dots E_1$ så att $(E_p E_{p-1} \dots E_1) \cdot A = I_n$

Produkten av inverterbara matriser är också inverterbar, så:

$$(E_p E_{p-1} \dots E_1)^{-1}(E_p E_{p-1} \dots E_1) \cdot A = (E_p E_{p-1} \dots E_1)^{-1} \cdot I_n \iff$$

$\iff A = (E_p E_{p-1} \dots E_1)^{-1}$. $A$ är inverterbar vilket då ger:

$$A^{-1} = ((E_p E_{p-1} \dots E_1)^{-1})^{-1} = E_p E_{p-1} \dots E_1 \qquad \text{V.S.B.}$$

## 11. A är inverterbar om det $A \neq 0$

Sats. En nxn matris är inverterbar endast om $\det(A) \neq 0$

Bevis Låt $U$ vara en trappstegsmatris så att $A \sim U$. Eftersom $U$ är en trappstegsmatris kommer den vara en triangulär matris, då kommer $\det(U)$ vara produkten av diagonalen genom $U$. (E.T.S) Eftersom $A \sim U$ kommer $\det(A) = \pm k \cdot \det(U)$, för någon konstant (E.T.S).

X Om $U$ innehåller en nollrad kommer ett element i diagonalen vara noll, därför kommer $\det(U) = \det(A) = 0$. Eftersom $U$ innehåller en nollrad finns ej pivotelement i varje rad i $A$, $A$ kommer därför inte kunna radreduceras till $I_n$, så $A$ är ej inverterbar.

X Om $U$ inte innehåller någon nollrad kommer det finnas pivotplats i varje rad. Eftersom $U$ är kvadratisk kommer pivotelementen i $U$ ligga i diagonalen. Då kommer $\det(U) \neq 0$, följaktligen kommer $\det(A) \neq 0$. Eftersom $U$ innehåller ett pivotelement på varje rad så $A \sim U \sim I_n$, så är $A$ inverterbar.

## 12 Determinant av produkt

Sats A och B är nxn matriser. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

Bevis Om $A$ inte är inverterbar så är inte $AB$ det heller, så

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 0$$

Om $A$ är inverterbar, så är $A \sim I_n$ (E.T.S). Då existerar elementära matriser $E_1\ E_2 \ldots E_p$ så att: $A = E_p E_{p-1} \cdots E_1 \cdot I_n = E_p E_{p-1} \cdots E_1$

Beteckna $\det(A) = |A|$.

Upprepade radoperationer ger då:

$$|AB| = |E_p E_{p-1} \cdots E_1 B| = |E_p| \cdot |E_{p-1} \cdots E_1 B| = \ldots = |E_p| \cdot |E_{p-1}| \cdot \ldots \cdot |E_1| \cdot |B| =$$

$$= |E_p E_{p-1} \cdots E_1| |B| = |A| |B| =$$

Alltså: $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

## 13 Lösningar till homogena differentialekvationer av 2:a ord med konstanta koefficienter

**Sats** Låt $r_1$ och $r_2$ vara lösningar till ekvationen $r^2+ar+b=0$

Då har differentialekvationen $y''+ay'+by=0$ lösningarna:

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}\quad ,\text{om } r_1\neq r_2 \quad \text{och}\quad y=(C_1x+C_2)e^{r_1x},\ \text{om } r_1=r_2$$

**Bevis** Vänsterledet i diff.ekvationen kan skrivas om med deriveringsoperatorer.

$(D^2+aD+c)y=(D-r_1)(D-r_2)y$ . Sätt $(D-r_2)y=z$ :

$(D-r_1)z=z'-r_1z=0$ , ODE 1a ord.

Multiplikation med integrerande faktor ger:

$D(e^{-r_1x}z)=0 \Leftrightarrow e^{-r_1x}z=C \Leftrightarrow z=Ce^{r_1x}$

Eftersom $z=(D-r_2)y$ får vi

$y'-r_2y=Ce^{r_1x}$ multiplikation med integrerande faktor ger:

$D(e^{-r_2x}y)=Ce^{r_1x}\cdot e^{-r_2x}=Ce^{(r_1-r_2)x}$

x Om $r_1\neq r_2$:

$$e^{-r_2x}y=\frac{C}{r_1-r_2}e^{(r_1-r_2)x}+C_2 \Leftrightarrow y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$$

x Om $r_1=r_2$:

$$e^{-r_2x}y=Cx+C_2 \Leftrightarrow y=e^{r_2x}(Cx+C_2)$$

V.S.B

## 14. Multiplikation av exponentialfunktion med komplex exponent och de Moivres form

$e^{ix}\cdot e^{iy}=e^{i(x+y)}$ De moivres formel: $(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx$

**Bevis** Eulers formel säger: $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ och $e^{iy}=\cos y+i\sin y$

Då blir: $e^{ix}\cdot e^{iy}=(\cos x+i\sin x)(\cos y+i\sin y)=$

$=(\cos x\cos y-\sin x\cdot\sin y)+i(\sin x\cos y+\cos x\sin y)=$

$=\cos(x+y)+i\sin(x+y)=e^{i(x+y)}$

Då följer $(e^{ix})^n=e^{ix}\cdot e^{ix}\cdot\ldots\cdot e^{ix}=e^{i(x+x+x\ldots+x)}=e^{i(nx)}$

Och således: $(\cos x+i\sin x)^n=e^{ix(n)}=e^{i(nx)}=\cos nx+i\sin nx$