Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Niklas Eriksen

Tentamen i tmv 035 C, Analys och linjär algebra C för K, Kf och Bt
lösningar
2008-08-29

---

1. Lös initialvärdesproblemet $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ för

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix},$$

givet att $\boldsymbol{x}(0) = (1, 6)^{\mathrm{T}}$.

Lösning: Egenvärdena beräknas genom

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-2-\lambda) - 4 \\ &= \lambda^2 + \lambda - 6 \\ &= (\lambda+3)(\lambda-2). \end{aligned}$$

Egenvärdena är således -3 och 2. Ekvationerna $(A - \lambda I)\boldsymbol{v} = 0$ för dessa värden löses av $\boldsymbol{v}_1 = (1, -4)^T$ och $\boldsymbol{v}_2 = (1, 1)^T$.

Den generella lösningen blir då

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}.$$

För $t = 0$ fås

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

som löses av $c_1 = -1$ och $c_2 = 2$. Problemet löses alltså av

$$\boldsymbol{x}(t) = -\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3t} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}.$$

2. Antag att A är en symmetrisk matris med egenvektorer $(1, 2, 3)^T$ och $(2, -1, 0)^T$. Beräkna en tredje egenvektor.

   Lösning: Eftersom A är symmetrisk är kan egenvektorerna göras ortogonala. En vektor ortogonal mot de två givna måste alltså vara en egenvektor. Den fås enklast genom att beräkna

$$\begin{aligned}(1, 2, 3) \times (2, -1, 0) &= (2 \cdot 0 - 3 \cdot (-1), 3 \cdot 2 - 1 \cdot 0, 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2) \\ &= (3, 6, -5).\end{aligned}$$

3. Skissa några nivåkurvor till funktionen $f(x, y) = x^3 - y^2$ och beräkna längden av nivåkurvan $f(x, y) = 0$ för $0 \leq x \leq 3$.

   Lösning: Vi får $C = x^3 - y^2$, vilket ger $y = \sqrt{x^3 - C}$. För $C = 0$ har vi $y = x^{3/2}$, vars längd ges av

$$\begin{aligned}S &= \int_0^3 \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^3 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^3 \sqrt{4 + 9x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(4 + 9x)^{3/2}}{9 \cdot 3/2}\right]_0^3 \\ &= \frac{1}{27}\left[(4 + 9x)^{3/2}\right]_0^3 \\ &= \frac{31^{3/2} - 8}{27}.\end{aligned}$$

4. Bestäm det största och minsta värdet av $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y$ på den slutna triangeln (det vill säga inklusive triangelns inre) med hörn i $(2, -2)$, $(2, 3)$ och $(-3, -2)$.

   Lösning: I det inre av triangeln måste ett eventuellt extremvärde minimum antas i punkter där $\nabla f = 0$. Vi får $0 = \nabla f = (2x - 2y, -2x + 4y - 2))$, vilket ger att $x = y = 1$. En kritisk punkt är således $(1, 1)$.

   Vi delar upp randen i 3 delar, som ges av $x = 2$ för $-2 \leq y \leq 3$, $y = -2$ för $-3 \leq x \leq 2$ samt $y = x + 1$ för $-3 \leq x \leq 2$. I första fallet får vi $f(2, y) = 4 + 2y^2 - 6y = g_1(y)$, där $0 = g'(y) = 4y - 6$ löses av $y = 3/2$. En kritisk punkt blir således $(2, 3/2)$. På samma sätt fås

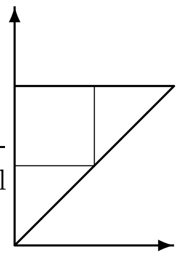
$f(x,-2) = x^2 + 4x + 12 = g_2(x)$, som ger kritisk punkt $(-2,-2)$ och $f(x, x+1) = x^2$, som ger kritisk punkt $(0,1)$. Till dess kritiska punkter lägger vi dessutom hörnen.

Beräknas värdet i dessa punkter får vi $f(1,1) = -1$, $f(2,3/2) = -1/2$, $f(-2,-2) = 8$, $f(0,1) = 0$, $f(2,-2) = 24$, $f(2,3) = 4$ samt $f(-3,-2) = 9$. Störst är alltså 24 och minst -1.

5. Bestäm

$$\iint_D \mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

där D är området givet av $0 \le x \le y \le 1$. Approximera även integralen med en Riemannsumma, där området delats upp enligt bilden till höger.



Lösning: Integralen löses genom

$$\begin{aligned}
\iint_D \mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{y} \mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left[x\mathrm{e}^{y^2}\right]_0^y \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 y\mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{2}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^t\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}-1}{2}.
\end{aligned}$$

För att beräkna Riemannsumman konstaterar vi att kvadraten har arean 1/4 och trianglarna 1/8 var. Dessa areor ska nu multipliceras med funktionsvärdet för någon punkt i respektive område. Väljer vi samtliga punkter på linjen $y = 1/2$ får vi

$$\mathrm{e}^{1/4}/8 + \mathrm{e}^{1/4}/4 + \mathrm{e}^{1/4}/8 = \mathrm{e}^{1/4}/2,$$

men andra val är naturligtvis också möjliga.

6. Kroppen K ges av $0 \le x^2 + y^2 \le z \le 1$. Beräkna

$$\iiint_K \frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}V.$$

Lösning: Vi ser genast att

$$\begin{aligned}
\iiint_K \frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}V &= \iint_{x^2+y^2\le 1} \big[\arctan(z)\big]_{x^2+y^2}^{1}\,\mathrm{d}A \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1} \arctan(1) - \arctan(x^2+y^2)\,\mathrm{d}A \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{\pi}{4} - \arctan(x^2+y^2)\,\mathrm{d}A \\
&= \frac{\pi^2}{4} - \iint_{x^2+y^2\le 1} \arctan(x^2+y^2)\,\mathrm{d}A
\end{aligned}$$

Den senare termen beräknar vi sedan med polära koordinater och en av de på tentan givna integralerna.

$$\begin{aligned}
\iint_{x^2+y^2\le 1} \arctan(x^2+y^2)\,\mathrm{d}A &= 2\pi\int_0^1 \arctan(r^2)r\,\mathrm{d}r \\
&= \pi\int_0^1 \arctan(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \pi\left[t\arctan(t) - \frac{\ln(1+t^2)}{2}\right]_0^1 \\
&= \pi\left(\pi/4 - \frac{\ln(2)}{2}\right).
\end{aligned}$$

Summerar man detta får man

$$\iiint_K \frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}V = \frac{\pi\ln(2)}{2}.$$

7. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_D (x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S,$$

där D är den del av paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför $z = 2$. Enhetsnormalen $\boldsymbol{n}$ har positiv tredje komponent.

Lösning: Av

$$\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

följer att

$$\begin{aligned}
\iint_D (x,y,z)\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S &= \iint_{x^2+y^2\le 2} (x,y,z)\cdot(2x,2y,1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 2} (2x^2+2y^2+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 2} (x^2+y^2+4)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (r^2+4)r\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \left[\frac{r^4}{4}+2r^2\right]_0^{\sqrt{2}} = 10\pi.
\end{aligned}$$

8. Visa att fältet

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(\frac{1}{1+(x-y)^2}, \frac{y+z}{1+(y+z)^2} - \frac{1}{1+(x-y)^2}, \frac{y+z}{1+(y+z)^2}\right)$$

är konservativt och beräkna sedan

$$\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

för kurvan $\gamma = (\mathrm{e}^{\cos 2t}, \mathrm{e}^{\sin 2t}, -\cos t)$ där t går från 0 till π.

Lösning: Vi vill finna $\phi(x,y,z)$ så att $\nabla\phi = \boldsymbol{F}$. Om sådant ϕ finns gäller

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{1}{1+(x-y)^2}$$

och därmed

$$\phi = \arctan(x-y) + f(y,z).$$

Av detta följer

$$-\frac{1}{1+(x-y)^2} + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{y+z}{1+(y+z)^2} - \frac{1}{1+(x-y)^2},$$

som förenklas till

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y+z}{1+(y+z)^2}.$$

Vi har alltså

$$\phi = \arctan(x-y) + f(y,z) = \arctan(x-y) + \frac{\ln(1+(y+z)^2)}{2} + g(z)$$

och deriverar vi med avseende på z ser vi att $g(z) = C$ ger $\nabla\phi = \boldsymbol{F}$. Därmed har $\boldsymbol{F}$ den beräknade potentialen och vi kan skriva

$$\begin{aligned}\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \phi(\boldsymbol{r}(\pi)) - \phi(\boldsymbol{r}(0)) \\ &= \phi(\mathrm{e},1,1) - \phi(\mathrm{e},1,-1) \\ &= \arctan(\mathrm{e}-1) + \frac{\ln 5}{2} - \arctan(\mathrm{e}-1) - \frac{\ln 1}{2} = \frac{\ln 5}{2}.\end{aligned}$$

9. (a) Visa att om matrisen A har två olika egenvärden λ_1 och λ_2 med tillhörande egenvektorer $\boldsymbol{x}_1$ och $\boldsymbol{x}_2$, så är $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ inte en egenvektor till A.

   (b) Antag att A är symmetrisk med egenvärdena $\lambda_1 > \ldots > \lambda_n$ och deras normerade egenvektorer $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ (kolumnvektorer). Ange egenvärdena till matrisen $A - \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1^T$ med hjälp av egenvärdena till A.

   Lösning:

   (a) Antag att $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ är en egenvektor till A. Ur $A\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1$ och $A\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2$ samt linjäritet följer då $\lambda(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2$. Men då har vi

   $$\boldsymbol{x}_1 = \frac{\lambda_2 - \lambda}{\lambda - \lambda_1}\boldsymbol{x}_2$$

   vilket ger motsägelse, eftersom två egenvektorer med olika egenvärden måste vara linjärt oberoende.

   (b) Vi har

   $$(A - \lambda_1\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^T)\boldsymbol{u}_1 = A\boldsymbol{u}_1 - \lambda_1\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{u}_1^T\boldsymbol{u}_1) = \lambda_1\boldsymbol{u}_1 - \lambda_1\boldsymbol{u}_1 = 0$$

   samt, för $i > 1$,

   $$(A - \lambda_1\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^T)\boldsymbol{u}_i = A\boldsymbol{u}_i - \lambda_1\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{u}_1^T\boldsymbol{u}_i) = \lambda_i\boldsymbol{u}_i,$$

   eftersom $\boldsymbol{u}_1^T\boldsymbol{u}_1 = 1$ och $\boldsymbol{u}_1^T\boldsymbol{u}_i = 0$ för $i > 1$. Eftersom vi har n linjärt oberoende egenvektorer har vi funnit samtliga egenvärden, nämligen $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ och 0.

10. Beräkna

$$\iint_D xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

där D ges av området begränsat av kurvorna $x \leq y \leq 3x$, $1/x^2 \leq y \leq 2/x^2$.

Lösning: Vi förenklar området genom att byta variabler. Vi väljer $u = y/x$ och $v = x^2 y$. Gränserna blir då $1 \leq u \leq 3$ och $1 \leq v \leq 2$. Vi får dessutom

$$\frac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(x,y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 2xy & x^2 \end{vmatrix} = -y - 2y = -3y$$

och således

$$\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \left|\frac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(x,y)}\right| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Genom att lösa ut $xy = u^{1/3}v^{2/3}$ får vi

$$\begin{aligned}
\iint_D xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{3}\iint_D xy(3y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{3}\int_1^3\int_1^2 u^{1/3}v^{2/3}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{3u^{4/3}}{4}\right]_1^3 \left[\frac{3v^{5/3}}{5}\right]_1^2 \\
&= \frac{3}{20}(3^{4/3}-1)(2^{5/3}-1).
\end{aligned}$$