MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen 2010-03-05, kl. 8.30–12.30

TMV036 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del C

Tentamensvakt: Håkan Samuelsson
Hjälpmedel: Inga, bara papper och penna.

För full poäng krävs fullständiga lösningar. Strukturera dina lösningar väl, skriv tydligt och motivera dina påståenden!

Betygsgränser: 20–29 p. ger betyget 3, 30–39 p. ger betyget 4, 40–50 p. ger betyget 5.

Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan senast första arbetsdagen efter tentamenstillfället.
Resultat meddelas via epost från LADOK.

---

1. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D xy\,dxdy,$$

där $D \subset \mathbb{R}^2$ är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(2,0)$ och $(0,3)$. (5p)

2. Låt $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 3y}$ vara definierad för $x > 0$, $y > 0$.

   a) Linearisera f i punkten $(1,1)$, dvs. skriv upp ekvationen för tangentplanet till grafen av f i punkten $(1,1,2)$. (3p)

   b) Beräkna $\sqrt{3} = f(3/4, 13/16)$ approximativt. (3p)

3. Låt A vara matrisen nedan. Diagonalisera A, dvs. skriv A på formen $A = PDP^{-1}$, där P är inverterbar och D är en diagonalmatris. (6p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

4. En kropp i rummet upptar området

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Kroppen har en varierande densitet given av $\delta(x,y,z) = 1 + z$ (gram/volymsenhet). Beräkna kroppens massa. (5p)

V.G. vänd $\hookrightarrow$

5. Låt $f(x,y)$ vara funktionen $f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}$ och låt D vara området $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0, x^2+y^2 \leq 4\}$.

   a) Vi kan vara säkra på att f har ett största och ett minsta värde i D. Varför? (2p)

   b) Bestäm största värdet av f i D. (3p)

6. Låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, y^2, z^3)$.

   a) Avgör om $\mathbf{F}$ är konservativt eller ej. Motivera ditt svar! (3p)

   b) Låt $\mathcal{C}$ vara kurvan given på parameterform av $\mathbf{r}(t) =$ $= (-\cos t, -\cos t, \sqrt{2}\sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$. Beräkna kurvintegralen (3p)

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

7. Låt A vara matrisen från uppgift 3.

   a) Hitta allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$. (3p)

   b) Skissa några ”typiska” trajektorier. (Motivering behövs ej.) (1p)

   c) Skissa vektorfältet $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definierat av $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. (Motivering behövs ej.) (1p)

8. Låt $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{b}$ vara vektorerna nedan och låt M vara matrisen $M = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2]$.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

   a) Beräkna projektionen, $\hat{\mathbf{b}}$, av $\mathbf{b}$ på kolonnrummet till M. (2p)

   b) Motivera varför ekvationssystemet $M\mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}$ har lösning. ($\hat{\mathbf{b}}$ är projektionen av $\mathbf{b}$ på $\operatorname{Col} M$.) (2p)

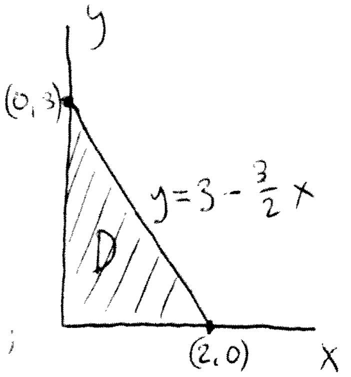
   c) Bestäm $\mathbf{x}$ så att $\|M\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ blir minimal. (2p)

9. Låt B vara en $m \times n$-matris. Visa att $(\operatorname{Col} B)^{\perp} = \operatorname{Nul} B^T$. (6p)

Lycka till!
/Håkan Samuelsson

Lösningsförslag, tenta 5/3 -10, ALA C

1)



$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_{x=0}^{2}\left(\int_{y=0}^{3-\frac{3x}{2}} xy\,dy\right)dx = \int_{x=0}^{2} x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{3-\frac{3x}{2}} dx$$

$$= \int_0^2 x\cdot\frac{\left(3-\frac{3x}{2}\right)^2}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 9x - 9x^2 + \frac{9}{4}x^3\,dx =$$

$$= \frac{9}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{16}\right]_0^2 = 3/2$$

2.) a) Lineariseringen, $L(x,y)$, av $f(x,y)$ i punkten $(1,1)$ är (enl. Adams avsnitt 12.6)

$$f(x,y) \approx L(x,y) = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\cdot(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\cdot(y-1)$$

$$= \cancel{4}\,2 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{4}(y-1)$$

b) $\sqrt{3} = f\left(\frac{3}{4}, \frac{13}{16}\right) \approx L\left(\frac{3}{4}, \frac{13}{16}\right) = 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-1\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{13}{16}-1\right)$

$= \frac{111}{64} \approx 1{,}73$

3.) Vi börjar med att beräkna egenvärden och egenvektorer till A.

Egenvärden:

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & -1-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(-1-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 9 \Rightarrow \lambda = \pm 3$$

Egenvektorer:

- Hörande till $\lambda = 3$:

  Lös ekv. systemet $(A - 3I)x = 0$:

  $$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  Efter radreduktion får vi $x = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ där t är e fri variabel

- Hörande till $\lambda = -3$:

  Lös ekv. systemet $(A + 3I)x = 0$

  $$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Enl. Lay, avsnitt 5.3 skall vi sätta

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

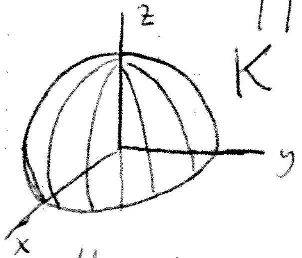
Vi beräknar $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

och får den önskade diagonaliseringen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

4.) Kroppens massa är given av trippelintegralen

$$\iiint_K \delta(x,y,z)\, dx\,dy\,dz.$$



Vi beräknar denna genom att byta till sfäriska koordinater (ρ, φ, θ)

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cdot \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \cdot \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \qquad dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

Uttryckt i sfäriska koordinater blir K området

$$K' = \{(\rho, \varphi, \theta) ; 0 \le \rho \le 1, \ 0 \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2}, \ 0 \le \theta \le \tfrac{\pi}{2}\}$$

Så $\iiint\limits_{K} \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{K'} \delta \cdot \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$

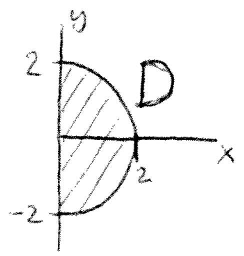
$$= \int_{\rho=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{\pi/2} (1+\rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi\,d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{\rho=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\left(\rho^2\cdot\sin\varphi+\rho^3\cos\varphi\cdot\sin\varphi\right)d\varphi\,d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{\rho=0}^{1}\left[-\rho^2\cos\varphi-\frac{\rho^3}{2}\cos^2\varphi\right]_{\varphi=0}^{\pi/2}d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{0}^{1}\rho^2+\frac{\rho^3}{2}\,d\rho = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\rho^3}{3}+\frac{\rho^4}{8}\right]_0^1 = \frac{11\pi}{48} \quad \text{(gram)}$$

5.)



a) Området D är slutet och begränsat och funktionen f är kontinuerlig. Enligt sats 13.1:2 i Adams har f största och minsta värde i D.

b) Kandidater till max- och minpunkter är
1) Singulära punkter, 2) kritiska punkter, 3) randpunkt

1) Singulära punkter: Finns inga eftersom f är differentierbar.

2.) Kritiska punkter: Är de som uppfyller $0 = \nabla f(x,y)$

dvs. $0 = \left(e^{-x^2-y^2} - 2x(x+y)e^{-x^2-y^2},\ e^{-x^2-y^2} - 2y(x+y)e^{-x^2-y^2}\right)$

dvs. $(*)\begin{cases} 1 = 2x(x+y) \\ 1 = 2y(x+y) \end{cases}$

Vi ser att $x \neq 0$, $y \neq 0$, $(x+y) \neq 0$.

Dividera första ekv. med den andra: $1 = \frac{x}{y} \Rightarrow x = y$

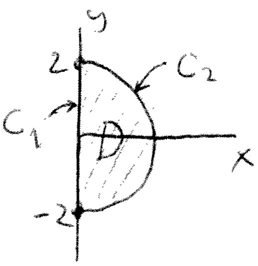
Sätt in i t.ex. den första ekv.: $1 = 2x(x+x) = 4x^2$

$\Rightarrow x = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{2}$

$(*)$ har alltså lösningarna $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ och $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

Men $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ligger inte i D så f har bara en kritisk punkt i D: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

3.) Randpunkter:



Randen av D består av de två kurvorna C_1 och C_2

C_1: är parametriserad av $x = 0$, $y = t$, $-2 \leq t \leq 2$

$$f\big|_{C_1} = te^{-t^2} =: f_1(t)$$

$$f_1'(t) = e^{-t^2}(1 - 2t^2) = 0 \Rightarrow t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Kandidater på C_1 är alltså $(0, 1/\sqrt{2})$, $(0, -1/\sqrt{2})$ och ändpunkterna $(0, 2)$, $(0, -2)$

C_2: är parametriserad av $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$f\big|_{C_2} = 2(\cos t + \sin t)e^{-4} =: f_2(t)$$

$$f_2'(t) = (-\sin t + \cos t)\cdot 2e^{-4} = 0 \Rightarrow \sin t = \cos t$$

$$\Rightarrow t = \pm\frac{\pi}{4} \left(+n\cdot\pi\right)$$

Kandidater på C_2 är alltså $\left(2\cos\frac{\pi}{4}, 2\sin\frac{\pi}{4}\right) =$
$= (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ och $\left(2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right), 2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

Kandidater till extrempunkter för f i D är:
$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $(0,-2)$, $\left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $(0,2)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}}$, $f(0,-2) = -2e^{-4}$, $f\left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$

$f\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$, $f(0,2) = 2e^{-4}$, $f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}e^{-4}$, $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 0$

Största värde: $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = e^{-1/2}$

6.) a) Vi försöker hitta en potential φ, dvs. en funktion s.a. $\nabla\varphi = \mathbb{F}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = x \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = y^2 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = z^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{x^2}{2} + C_1(y,z) \\ \frac{\partial C_1}{\partial y} = y^2 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = z^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{x^2}{2} + C_1(y,z) \\ C_1 = \frac{y^3}{3} + C_2(z) \\ \frac{\partial C_2}{\partial z} = z^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + C_2(z) \\ C_2 = \frac{z^4}{4} + C_3 \end{cases}$$

konstant.

Så $\varphi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^4}{4}$ är en potential till $\mathbb{F}$ och $\mathbb{F}$ är alltså konservativt.

b) Eftersom $\mathbb{F}$ är konservativt gäller

$$\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \varphi(\text{slutpunkt}) - \varphi(\text{startpunkt})$$

$$= \varphi(1,1,0) - \varphi(-1,-1,0)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 2/3$$

7.) a) Vi vet från Lay, avsnitt 5.7, att $\mathbb{v} \cdot e^{\lambda t}$ är en lösning till $\mathbb{x}'(t) = A\mathbb{x}(t)$ omm $\mathbb{v}$ är en egenvektor och λ är tillhörande egenvärde

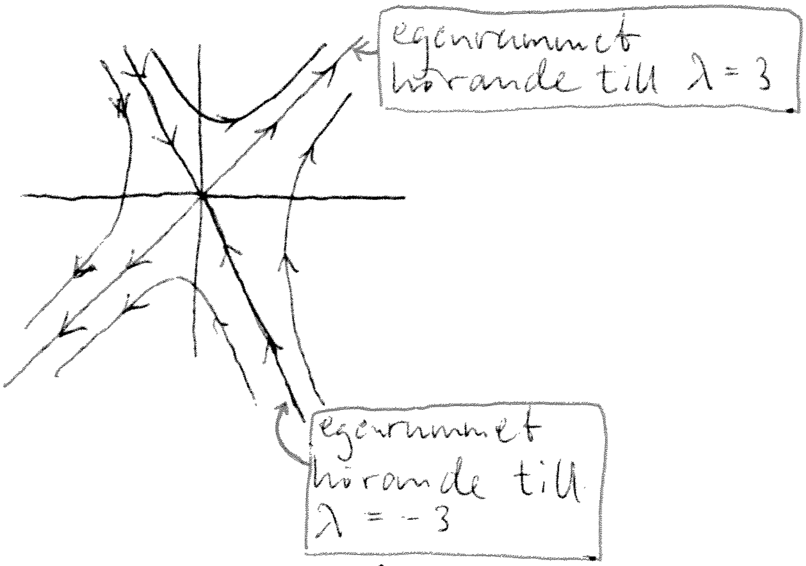
Vi har sett att $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ är egenvektorer och att tillhörande egenvärden är 3 resp. -3

Alltså är $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^{3t}$ och $\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}e^{-3t}$ lösningar till $\mathbb{x}' = A\mathbb{x}$.

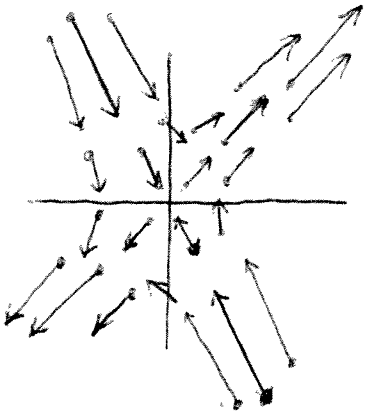
Allmäna lösningen är linjärkombinationer av dessa två.

Allmänna lösningen: $C_1 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^{3t} + C_2\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}e^{-3t}$

b)



c)



8.) a) $\mathrm{Col}\, M = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ och $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$
så $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är ortogonala.
Vi kan alltså beräkna projektionen $\hat{\mathbf{b}}$
av $\mathbf{b}$ på $\mathrm{Col}\, M$ med formeln

$$\hat{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2$$

$$= \frac{12}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{21}{21} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

b) Per def. är $\hat{\mathbf{b}}$ i $\mathrm{Col}\, M$. Men $\mathrm{Col}\, M$
är bilden av M, dvs $\mathrm{Col}\, M = \{M\mathbf{x} \,;\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\}$
Alltså finns $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ så att $\hat{\mathbf{b}} = M\mathbf{x}$.

c) $\|M\mathbb{x}-\mathbb{b}\|$ är minimal precis då avståndet mellan $\mathbb{b}$ och $M\mathbb{x}$ är minimalt, dvs. då $M\mathbb{x} = \hat{\mathbb{b}}$ är projektionen av $\mathbb{b}$ på Col M.
Vi skall alltså lösa

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbb{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$ som har lösn. $\mathbb{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

9.) Se beviset av sats 6.1:3 i Lay