MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen 2010-03-13, kl. 8.30–12.30

TMV036 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del C

Telefonvakt: Magnus Goffeng, telefon: 0703-08 83 04
Hjälpmedel: Inga, bara papper och penna.

För full poäng krävs fullständiga lösningar. Strukturera dina lösningar väl, skriv tydligt och motivera dina påståenden!

Betygsgränser: 20–29 p. ger betyget 3, 30–39 p. ger betyget 4, 40–50 p. ger betyget 5.

Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan senast första arbetsdagen efter tentamenstillfället.
Resultat meddelas via epost från LADOK.

---

1. Låt $R \subset \mathbb{R}^3$ vara rätblocket $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$. Beräkna trippelintegralen (5p)
$$\iiint_R x^3 y^2 z \, dxdydz.$$

2. Låt $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ och $\mathbf{y}$ vara vektorerna
$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
   a) Verifiera att $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ är en bas för $\mathbb{R}^2$. (2p)
   b) Beräkna koordinatvektorn för $\mathbf{y}$ i basen $\mathscr{B}$, dvs. beräkna $[\mathbf{y}]_{\mathscr{B}}$. (3p)

3. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x, y) = 4x/9 + y + xy/3$ på området $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \geq 1 - x,\ y \leq 1 - x^2\}$. (6p)

4. Låt A vara matrisen
$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{bmatrix}.$$
   a) Finns det en ortogonal bas för $\mathbb{R}^2$ bestående av egenvektorer till A? (2p)
   b) Beräkna A^5. (4p)

V.g. vänd ↪

5. Låt $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vara funktionen $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + 2x_3$ och låt Π vara planet $\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ f(x_1, x_2, x_3) = 0\}$.

   a) Beräkna en normalvektor, $\mathbf{n}$, till planet Π. (2p)

   b) Beräkna projektionerna av standardbasvektorerna i $\mathbb{R}^3$ på underrummet genererat av normalvektorn $\mathbf{n}$. (2p)

   c) Skriv upp matrisen (i standardbasen) för den linjära avbildningen $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definierad som spegling i planet Π, dvs. matrisen för avbildningen (2p)

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n}.$$

6. Låt $D \subset \mathbb{R}^2$ vara parallellogrammet med hörn i $(0,0)$, $(1,2)$, $(1,0)$ och $(2,2)$. Beräkna dubbelintegralen (6p)

$$\iint_D \sin\left(\frac{\pi}{2}(2x - y)\right) dxdy.$$

7. Låt $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = (xy, x^2 + y)$ och låt $\mathcal{C}$ vara randkurvan (genomlöpt moturs) till triangeln, T, med hörn i $(0,-1)$, $(0,1)$ och $(1,0)$. Beräkna flödet, $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$, av $\mathbf{F}$ ut ur T. (5p)

   ($\mathbf{n}$ är den utåtriktade normalvektorn till $\mathcal{C}$ och ds är båglängdselementet.)

8. Låt $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{b}$ vara vektorerna nedan och låt A vara matrisen $A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2]$ och $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funktionen $f(\mathbf{x}) = \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

   a) Beräkna gradienten, $\nabla f(\mathbf{x})$, av f. (2p)

   b) Visa att en punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ är en kritisk punkt för f om och endast om $\mathbf{x}$ uppfyller normalekvationerna (3p)

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}.$$

9. Låt $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en differentierbar funktion, låt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vara en fix punkt sådan att $\nabla f(a, b) \neq \mathbf{0}$ och låt $\mathcal{C}$ vara nivåkurvan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x, y) = f(a, b)\}$. Visa att $\nabla f(a, b)$ är en normalvektor till $\mathcal{C}$ i punkten (a, b). (6p)

Lycka till!
/Håkan Samuelsson

Lösningsförslag, tenta 13 mars 2010

Analys och linjär algebra K Kf Bt, del C

---

1. Vi räknar med upprepad integration:

$$\begin{aligned}\iiint_R x^3y^2z\,dxdydz &= \int_{x=0}^1\int_{y=0}^2\int_{z=0}^3 x^3y^2z\,dxdydz = \int_{x=0}^1\int_{y=0}^2 x^3y^2\left[z^2/2\right]_0^3 dxdy\\ &= 3^2/2\int_{x=0}^1 x^3\left[y^3/3\right]_0^2 dx = 3^2/2\cdot 2^3/3\cdot\left[x^4/4\right]_0^1\\ &= 3.\end{aligned}$$

2. Låt B vara matrisen $B = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2]$.

   a) Det är klart att $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_2$ är linjärt oberoende (ingen är en skalär gånger den andra). Vi måste också kolla att $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_2$ spänner upp $\mathbb{R}^2$, dvs. att varje vektor $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$ kan skrivas $\mathbf{v} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2$. Detta är samma sak som att säga att ekvationssystemet $B\mathbf{x} = \mathbf{v}$ har en lösning. Men det har det; B är inverterbar eftersom $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_2$ är linjärt oberoende.

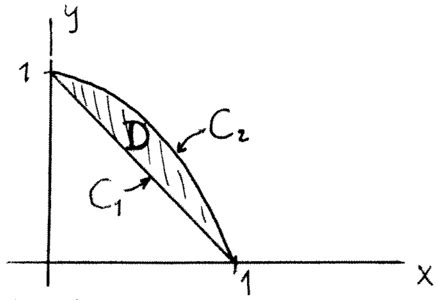
   b) Vi vill hitta skalärer x_1 och x_2 så att $\mathbf{y} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2$, dvs. vi vill lösa ekvationssystemet $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$ där $\mathbf{x} = [x_1\ x_2]^T$. Efter radreduktion får vi att $\mathbf{x} = [3/7\ 1/7]^T$ som är den önskade koordinatvektorn.

3. Kandidater till största och minsta värde i D är singulära punkter, kritiska punkter och randpunkter.

   Singulära punkter finns inte eftersom f är differentierbar.

   Kritiska punkter är de som uppfyller $\mathbf{0} = \nabla f(x,y)$. Vi har att $\nabla f(x,y) = (4/9+y/3, 1+x/3)$, så $\mathbf{0} = \nabla f(x,y) \Rightarrow x = -3$, $y = -4/3$. Men $(-3,-4/3)\notin D$ så det finns alltså inga kritiska punkter i D.

   Randpunkter: "Hörnen" är alltid kandidater.



   Kurvan C_1 är parametriserad av $x = t$, $y = 1-t$, $0\le t\le 1$ så f betraktad på C_1 är $f_1(t) = 4t/9 + 1 - t + t(1-t)/3 = 1 - 2t/9 - t^2/3$. Kritiska punkter till $f_1(t)$ är de som uppfyller $0 = f_1'(t) = -2/9 - 2t/3$. Vi får $t = -1/3$ som inte motsvarar en punkt på C_1.

   Kurvan C_2 är parametriserad av $x = t$, $y = 1-t^2$, $0\le t\le 1$ så f betraktad på C_2 är $f_2(t) = 4t/9 + 1 - t^2 + t(1-t^2)/3 = 1 + 7t/9 - t^2 - t^3/3$. Kritiska punkter till $f_2(t)$ är de som uppfyller $0 = f_2'(t) = 7/9 - 2t - t^2$. Vi får $t = 1/3$ eller $t = -7/3$.

$t = -7/3$ svarar inte mot någon punkt på C_2 men $t = 1/3$ svarar mot punkten $x = 1/3$, $y = 1 - 1/9 = 8/9$.

Kandidater till max- och minpunkter är: $(0,1)$, $(1,0)$ och $(1/3, 8/9)$. Vi har $f(0,1) = 1$, $f(1,0) = 4/9$ och $f(1/3, 8/9) = 92/81$, så största värdet är $92/81$ och minsta värdet är $4/9$.

4. a) Ja! Matrisen A är symmetrisk så spektralsatsen ger att det finns en ortogonalbas för $\mathbb{R}^2$ bestående av egenvektorer till A.

   b) Vi börjar med att diagonalisera A. Egenvärden hittar vi genom att lösa den karaktäristiska ekvationen $0 = \det(A - \lambda I) = (9/10 - \lambda)(3/5 - \lambda) - 1/25$. Vi får $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 1/2$. Tillhörande egenvektorer hittar vi genom att lösa ekvationssystemen $(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ och $(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
   Efter radreduktion får vi att $[-2s \;\; s]^T$ är lösningen till det första ekvationssystemet och att $[t \;\; 2t]^T$ är lösningen till det andra (s och t är fria variabler). Vi tar $\mathbf{v}_1 = [-2 \;\; 1]^T$ och $\mathbf{v}_2 = [1 \;\; 2]^T$ som egenvektorer hörande till $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 1/2$ respektive. Sätt nu

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

   Vi får

$$\begin{aligned} A^5 &= (PDP^{-1})^5 = PD^5P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2^5 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 129/4 & -31/2 \\ -31/2 & 9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5. a) Planet Π är nivåytan $\{(x_1, x_2, x_3);\; f(x_1, x_2, x, 3) = 0\}$ så en normalvektor ges av gradienten $\nabla f(x_1, x_2, x_3) = (1, -1, 2)$.

   b) Projektionerna av standardbasvektorerna $\mathbf{e}_1 = [1 \;\; 0 \;\; 0]^T$, $\mathbf{e}_2 = [0 \;\; 1 \;\; 0]^T$ och $\mathbf{e}_3 = [0 \;\; 0 \;\; 1]^T$ på underrummet V genererat av $\mathbf{n} = [1 \;\; -1 \;\; 2\;]^T$ ges av

$$\mathrm{Proj}_V(\mathbf{e}_1) = \frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ -1/6 \\ 1/3 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{Proj}_V(\mathbf{e}_2) = \frac{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n} = \frac{-1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/6 \\ 1/6 \\ -1/3 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{Proj}_V(\mathbf{e}_3) = \frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n} = \frac{2}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}.$$

   c) Matrisen för T i standardbasen ges av $[T(\mathbf{e}_1) \; T(\mathbf{e}_2) \; T(\mathbf{e}_3)]$ så vi räknar:

$$T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - 2\frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1/6 \\ -1/6 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix},$$

$$T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 - 2\frac{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1/6 \\ 1/6 \\ -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix},$$

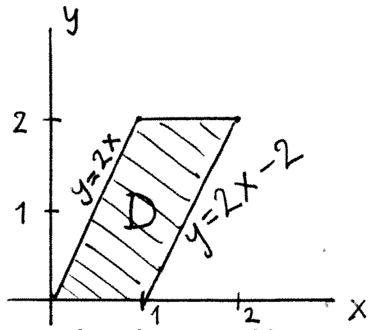
$$T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 - 2\frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}.$$

Marisen för T i standardbasen blir alltså

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

6. Figuren nedan antyder att följande variabelbyte möjligen kan underlätta räkningarna.

$$\begin{cases} u &= 2x - y \\ v &= y \end{cases}, \quad \text{dvs.} \quad \begin{cases} x &= (u+v)/2 \\ y &= v \end{cases}.$$



Området D uttryckt i uv-koordinaterna blir
$D' = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le u \le 2,\ 0 \le v \le 2\}$. Vi beräknar också funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\left(\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1/2.$$

Enligt regeln för variabelbyten i dubbelintegraler får vi nu

$$\begin{aligned} \iint_D \sin\left(\frac{\pi}{2}(2x-y)\right) dxdy &= \iint_{D'} \sin\left(\frac{\pi}{2}u\right)\frac{1}{2}\, dudv = \int_{u=0}^{2}\int_{v=0}^{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}u\right)\frac{1}{2}\, dudv \\ &= \int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}u\right) du = \frac{4}{\pi}. \end{aligned}$$

7. Vektorfältet $\mathbf{F} = (F_1, F_2) = (xy, x^2 + y)$ är differentierbart och kurvan $\mathcal{C}$ genomlöps moturs och innesluter triangeln T. Vi kan alltså beräkan det efterfrågade flödet m.h.a. divergenssatsen i 2D.

Vi får

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds &= \iint_T \frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\,dxdy = \iint_T y+1\,dxdy\\ &= \{\text{av symmetri}\} = \iint_T dxdy = \text{Area}(T) = 1.\end{aligned}$$

8. Vi börjar med att skriva om funktionen f:

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}) &= \|A\mathbf{x}-\mathbf{b}\|^2 = \|x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2-\mathbf{b}\|^2 = (x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2-\mathbf{b})\cdot(x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2-\mathbf{b})\\ &= x_1^2(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1)+x_2^2(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2)+2x_1x_2(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)-2x_1(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{b})-2x_2(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{b})+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}.\end{aligned}$$

a) Gradienten av f blir alltså

$$\begin{aligned}\nabla f(\mathbf{x}) &= 2(x_1(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1)+x_2(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)-\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{b},\ x_2(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2)+x_1(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)-\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{b})\\ &= 2(3x_1+6x_2-7/6,\ 14x_2+6x_1-1).\end{aligned}$$

b) Per definition är $\mathbf{x}=[x_1\ \ x_2]^T$ en kritisk punkt om $\mathbf{0}=\nabla f(\mathbf{x})$. Enligt uppgift a) kan denna ekvation skrivas

$$\begin{cases}0 = x_1(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1)+x_2(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)-\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{b}\\ 0 = x_2(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2)+x_1(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)-\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{b}\end{cases},$$

som på matrisform blir

$$\begin{bmatrix}(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1) & (\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)\\ (\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2) & (\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{b}\\ \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{b}\end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Men eftersom $A=[\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2]$ är

$$A^TA=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1^T\\ \mathbf{v}_2^T\end{bmatrix}[\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2]=\begin{bmatrix}(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1) & (\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)\\ (\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2) & (\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2)\end{bmatrix}, \quad \text{och}$$

$$A^T\mathbf{b}=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1^T\\ \mathbf{v}_2^T\end{bmatrix}\mathbf{b}=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{b}\\ \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{b}\end{bmatrix}.$$

Ekvationssystemet (1) kan alltså skrivas som $A^TA\mathbf{x}=A^T\mathbf{b}$ och vi har visat att $\nabla f(\mathbf{x})=\mathbf{0}$ om och endast om $A^TA\mathbf{x}=A^T\mathbf{b}$.

9. Se beviset av sats 12.7:6 i Adams.