MATEMATIK | **Hjälpmedel: utdelad ordlista, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2011-03-19 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Richard Lärkäng
tel. 0703-088304

TMV036 Analys och Linjär Algebra K Kf Bt, del C

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 10/11 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens (10/11) webbsida senast 21/3. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Därefter kan tentorna granskas och hämtas på MV:s exp. öppen alla vardagar 9-13.

---

1. (a) Låt $f(x, y) = xy + \ln(xy^2)$ vara definierad för $x > 0$, $y > 0$. Ange en ekvation till tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(1, 1, 1)$. (3p)

(b) Bestäm linjäriseringen för $f(x, y) = xy + \ln(xy^2)$ i $(1, 1)$ och utnyttja denna för att bestämma ett approximativt värde på $f(1.1, 0.9)$ (3p)

2. (a) Definiera begreppet egenvärde och egenvektor för en kvadratisk matris. (2p)

(b) Matrisen (5p)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

har egenvärdena 1 och -1. Bestäm respektive egenvektorer. Ge argument som visar att A är diagonaliserbar.
Ange en matris P som diagonaliserar A och ange motsvarande diagonalmatris D, dvs $A = PDP^{-1}$.

3. (a) Beräkna dubbelintegralen (3p)

$$\int\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}},$$

där D ges av $x^2 + y^2 \leq 4$, $-y \leq x \leq y$.

(b) Beräkna arean av den del av planet $z = 1 + 2x + 2y$ som ligger i området $K : 0 \leq y \leq 1 - x^2$. (3p)

4. Ett plan i $\mathbb{R}^3$ spänns upp av vektorerna $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$

(a) Bestäm en ortogonal bas för planet. (2p)

(b) Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$ på planet. (2p)

(c) Bestäm avståndet från punkten $(0, 2, 0)$ till planet. (2p)

Var god vänd!

5. (a) Vad menas med att ett vektorfält F är konservativt i ett område $\Omega \subset \mathbb{R}^3$? (2p)

(b) Låt $F(x, y, z) = (e^x \cos y + yz)\mathbf{i} + (xz - e^x \sin y)\mathbf{j} + (xy + z)\mathbf{k}$. Avgör om vektorfältet F är konservativt i $\mathbb{R}^3$. Motivera väl. (3p)

(c) För F i (b) beräkna kurvintegralen $\int_C F \cdot dr$ där C är spiralen $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \cos \pi t\mathbf{i} + \sin \pi t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ från $(1, 0, 0)$ till $(-1, 0, 1)$. (3p)

6. Bestäm största och minsta värdena för funktionen $f(x, y) = y^2+(x^2-1)y$ i triangeln med hörn i $(2, 2)$, $(-2, -2)$ och $(2, -2)$. (6p)

7. Bestäm en ekvation för tangentlinjen till skärningskurvan mellan de två ytorna $z = 1 - x^2 + y^2$ och $yz^2 - x = 1$ i punkten $(-1/2, 1/2, 1)$. (6p)

8. Formulera och bevisa kedjeregeln för $f \circ g$ då $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ och $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. (6p)

Lösningar

1. (a) Man verifierar lätt att $(1,1,1)$ ligger på ytan. Vi har också att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + \frac{1}{xy^2} \cdot y^2 \text{ och } \frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{1}{xy^2} \cdot (2xy)$$

och speciellt är $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 3$. Tangetplanet till ytan i punkten $(1,1,1)$ ges av ekvationen

$$z - 1 = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1),$$

dvs $z = 1 + 2(x-1) + 3(y-1)$.
Svar: $z = 2x + 3y - 4$.

(b) Linjäriseringen för $f(x,y)$ i $(1,1)$ ges av

$$L(x,y) = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) = 1 + 2(x-1) + 3(y-1).$$

Ett approximativt värde beräknas enligt $f(1.1, 0.9) \approx L(1.1, 0.9) = 1 + 2(1.1 - 1) + 3(0.9 - 1) = 0.9$.

2. (a) Se kursboken.
(b) Vi söker egenvektorerna till egenvärdena 1 och -1.

$\lambda_1 = 1$: Vi har

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi ser att matrisens nollrum spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -1$: Vi har

$$A + I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Efter återsubstitution ser vi att matrisens nollrum spänns upp av vektorn $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Enligt en sats i kursboken blir vektorerna $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ linjärt oberoende och därmed bildar en bas av egenevektorer i $\mathbb{R}^3$. Enligt satsen om diagonalisering är A diagonaliserbar dvs $A = PDP^{-1}$ där

$$P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Vi går över till de polära koordinaterna $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Vårt nya integrationsområdet blir rektangeln $E = \{(r,\varphi) : 0 \le r \le 2, \pi/4 \le \varphi \le 3\pi/4\}$ och vi får alltså

$$\begin{aligned}
&\int\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{16-x^2-y^2}} = \int\int_E \frac{rdrd\varphi}{\sqrt{16-r^2}} \\
&= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(\int_0^2 \frac{rdr}{\sqrt{16-r^2}}\right) d\varphi = (\text{variabelsubstitution } x = 16-r^2 \text{ ger}) \\
&= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} [-\sqrt{16-r^2}]_0^2 d\varphi = (2-\sqrt{3})\pi.
\end{aligned}$$

(b) Ytan parametriseras av $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, 1+2x+2y)$, där $0 \le y \le 1-x^2$ och $-1 \le x \le 1$. Beteckna ytan med Σ. Då blir $\mathbf{r}'_x = (1,0,2)$, $\mathbf{r}'_y = (0,1,2)$ och $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (-2,-2,1)$. Alltså är $|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y| = \sqrt{2^2+2^2+1} = 3$ och arean blir

$$\int\int_\Sigma dS = \int\int_D 3dxdy = 3 \cdot \text{arean av } D = 3\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = 3\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 4.$$

4. (a) Vi bestämmer en ortogonal bas mha Gramm-Schmidt metoden. Vi väljer den första basvektorn som $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ och beräknar den andra mha av formeln:

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

.

(b) Om $\mathbf{v} = [0\ 2\ 0]^T$ ges den sökta projektionen av

$$\text{proj}_W\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2\cdot\mathbf{b}_2}\mathbf{b}_2 = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Avståndet ges av $d = ||\mathbf{v} - \text{proj}_W\mathbf{v}|| = ||[0\ 1\ -1]^T|| = \sqrt{2}$.

5. (a) Se kursboken.

(b) Ett sätt att visa att fältet F är konservativt är att bestämma en potential, dvs en funktion $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sådan att

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= F_1(x,y,z) = e^x\cos y + yz, \\
\frac{\partial\varphi}{\partial y} &= F_2(x,y,z) = xz - e^x\sin y \\
\frac{\partial\varphi}{\partial z} &= F_3(x,y,z) = xy + z.
\end{aligned}$$

Den första ekvationen ger $\varphi(x,y,z) = e^x\cos y + xyz + C(y,z)$ för någon funktion $C(y,z)$ av två variabler. Insättning i den andra ekvationen ger $-e^x\sin y + xz + C'_y(y,z) = xz - e^x\sin y$ varav $C'_y(y,z) = 0$ och därmed $C(y,z) = D(z)$ för någon funktion D av en variabel. Vi har alltså $\varphi(x,y,z) = e^x\cos y + xyz + D(z)$. Insättning i den tredje ekvationen ger likheten $xy + D'(z) = xy + z$ varav $D'(z) = z$ och $D(z) = z^2/2 + K$, där K är en konstant. Vi har därmed funnit att

$$\varphi(x,y,z) = e^x\cos y + xyz + z^2/2 + K$$

är potentialer till det givna fältet.

(b) Den sökta kurvintegralen erhålles nu lätt:

$$\int_C F \cdot d\mathbf{r} = \varphi(-1,0,1) - \varphi(1,0,0) = e^{-1} - e + 1/2.$$

6. Eftersom funktionen f saknar singulariteter så måste extremvärdena antas antingen i kritiska punkter i det inre av triangeln eller i punkter på randen. Vi börjar med att bestämma ev. kritiska punkter till f. Vi har

$$\nabla f(x,y) = (2xy, 2y + x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 2xy = 0 \text{ och } 2y + x^2 - 1 = 0$$

Ur den första ekvationen får vi $x = 0$ eller $y = 0$ Insätning i den andra ekvationen ger oss kritiska punkter $(0,1/2)$, $(1,0)$ och $(-1,0)$. Man ser lätt att endast $(1,0)$ ligger i det inre av triangeln och $f(1,0) = 0$.

Vi undersöker sedan de tre randsidorna:

$$R_1 : y = x, -2 \le x \le 2, \quad R_2 : x = 2, -2 \le y \le 2 \quad R_3 : y = -2, -2 \le x \le 2.$$

R_1. $g_1(x) = f(x,x) = x^2 + x^3 - x$. Vi har $g_1'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ eller $x = 1/3$. Både dessa kritiska punkter ligger i intervallet $-2 \le x \le 2$. och funktionvärdena i dessa punkter är $g_1(-1) = 1$, $g_1(1/3) = -5/27$. Funktionvärdena i ändpunkter är $g_1(-2) = -2$, $g_1(2) = 10$.
$R_2 : g_2(y) = f(2,y) = y^2 + 3y$. Vi har $g_2'(y) = 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = -3/2$. Punkten ligger i intervallet $-2 \le y \le 2$ och funktionvärdet $g_2(-3/2) = -9/4$. Funktionvärdena i ändpunkter är $g_2(-2) = -2$, $g_2(2) = 10$.
$R_3 : g_3(x) = f(x,-2) = 4 - (x^2 - 1)2 = -2x^2 + 6$. Det har sitt största värde på intervallet $[-2,2]$ i punkten $x = 0$, $f(0) = 6$, minsta värdet antas i punkterna $x = \pm 2$ och är lika med -2.

Vi har alltså att funktionens största och minsta värde på triangeln är 10 och respektive $-9/4$.

7. En normal till ytan $g(x,y,z) = z - 1 + x^2 - y^2 = 0$ i punkt (x,y,z) på ytan ges av $\nabla g(x,y,z) = (2x, -2y, 1)$, speciellt i punkten $(-1/2, 1/2, 1)$ blir den $N_1 = (-1,-1,1)$. En normal till ytan $f(x,y,z) = yz^2 - x - 1 = 0$ i (x,y,z) på ytan är $\nabla f(x,y,z) = (-1, z^2, 2yz)$, och speciellt i punkten $(-1/2,1/2,1)$ blir den $N_2 = (-1,1,1)$. En tangentvektor, v, till skärningskurvan mellan ytorna i $(-1/2,1/2,1)$ är ortogonal till både N_1 och N_2. Vi kan alltså ta $v = N_1 \times N_2 = (-2,0,-2)$. Linjen genom $(-1/2,1/2,1)$ med riktingsvektorn v ges av ekvationen $(x,y,z) = t(-2,0,2) + (-1/2,1/2,1)$.

8. Se kursboken eller föreläsningsanteckningar.