MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2011-08-27 kl. 14.00–18.00
Tentamen | Telefonvakt: Emil Gustafsson
tel. 0703-088304

TMV036 Analys och Linjär Algebra K Kf Bt, del C

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 10/11 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens (10/11) webbsida senast 30/8. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Därefter kan tentorna granskas och hämtas på MV:s exp. öppen alla vardagar 9-13.

---

1. (a) Skissa ytorna $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$ och $x^2 + y^2 + z^2 = 4y$. (3p)

(b) Visa att ytorna skär varandra i punkten $(1, 1/2, \sqrt{3}/2)$ under rätt vinkel. (Med vinkel mellan ytorna i en punkt på ytorna menas vinkeln mellan ytornas respektive normaler i punkten.) Gäller detta för alla ytornas gemensamma punkter? (3p)

2. (a) Låt $f(x, y, z) = x^2 \cos(xz)$ och $\mathbf{a} = (1, 2, 0)$. Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $\mathbf{a}$ i riktningen $u = [1/3, 2/3, 2/3]^T$. (2p)

(b) Låt z vara en funktion av två variabler sådan att $z(x, y) = f(x^3 e^y)$ får någon differentierbar funktion f. Visa då att z uppfyller den pariella differentialekvationen (3p)

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - 3\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

(c) Ange Jacobimatrisen $D\mathbf{f}(x, y, z)$ till den funktion från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^2$ som ges av $\mathbf{f}(x, y, z) = (yz, x^2 \cos(xz))$. Beräkna speciellt $D\mathbf{f}(1, 2, 0)$ och använd bl.a. denna matris för att bestämma ett approximativt värde på $\mathbf{f}(1.1, 1.9, 0.2)$. (3p)

3. (a) Diagonalisera matrisen (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

dvs ange en matris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^{-1}$.

(b) Med hjälp av detta, lös följande system av differentialekvationer (3p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 9x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases} \qquad x_1(0) = 0, x_2(0) = 1.$$

4. Låt C vara den positivt orienterade randen av halvcirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$. Låt $\mathbf{F}(x, y) = (e^x - 2y^2)\mathbf{i} + (x + \sin(y^2))\mathbf{j}$. (7p)

(a) Är vektorfältet $\mathbf{F}$ konservativt i området begränsat av C?

(b) Beräkna kurvintegralen $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ med hjälp av Greens formel.

(c) Med hjälp av resultat i (b) beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där γ_1 är den del av enhetscikeln som ligger i övre halvplanet genomlupen medurs.

Var god vänd!

5. (a) Ange det ekvationssytem vars lösning är minstakvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (vi antar att detta system saknar lösning) och förklara vad det är som minimeras av. (3p)

(b) Bestäm minstakvadratlösningen till ekvationssystemet (3p)

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

6. Använd Lagranges multiplikatormetod för att bestämma största och minsta avståndet från ellipsen $13x^2 + 13y^2 + 10xy = 72$ till origo. (5p)

7. Låt $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{k}$. Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ ut genom ytan $\Omega : z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \geq 0$. Skissa ytan. (6p)

8. (a) Förklara vad som menas med en bas för ett underrum i $\mathbb{R}^n$. (6p)

(b) Bevisa att om $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$, är parvis ortogonala nollskilda vektorer i $\mathbb{R}^n$ så bildar de en bas i $\mathbb{R}^n$.

Lösningar

1. (a) Ytornas ekvationer skrivs om till

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ respektive } x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4.$$

Den första ytan blir alltså sfären med centrum i $(1,0,0)$ och radien 1 och den andra är sfären med centrum i $(0,2,0)$ och radien 2.

(b) Man verifierar lätt att $(1, 1/2, \sqrt{3}/2)$ ligger på både ytorna. En normal till ytan $x^2+y^2+z^2 = 2x$ (ytan $x^2+y^2+z^2 = 4y$) i punkt (x,y,z) ges av $N_1(x,y,z) = (2x-2)\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$ (respktive $N_2(x,y,z) = 2x\mathbf{i}+(2y-4)\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$). Vi beräknar skalärprodukten $N_1(x,y,z) \cdot N_2(x,y,z)$ i en skärningspunkt (x,y,z):

$$\begin{aligned} N_1(x,y,z) \cdot N_2(x,y,z) &= (2x-2)\cdot 2x + 2y(2y-4) + 2z \cdot 2z \\ &= 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4x - 8y \\ &= 2(x^2+y^2+z^2-2x) + 2(x^2+y^2+z^2-4y) = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Detta visar att ytorna skär varandra under rätt vinkel i varje skärningspunkt.

2. (a) Vi observerar först att $||u||^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$ och beräknar

$$\nabla f(x,y,z) = (2x\cos(xz) - x^2 z \sin(xz), 0, -x^3 \sin(xz)) \text{ och } \nabla f(1,2,0) = (2,0,0).$$

Riktningsderivatan är $(D_u f)(1,2,0) = u \cdot \nabla f(1,2,0) = 2/3$.

(b) Enligt kedjeregeln får man

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x^3 e^y) \cdot 3x^2 e^y \text{ och } \frac{\partial z}{\partial y} = f'(x^3 e^y) \cdot x^3 e^y$$

och därmed

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - 3\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^3 e^y f'(x^3 e^y) - 3x^3 e^y f'(x^3 e^y) = 0$$

(c) Låt $g_1(x,y,z) = yz$ och $g_2(x,y,z) = x^2\cos(xz)$. Då

$$(D\mathbf{f})(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ 2x\cos(xz) - x^2 z \sin(xz) & 0 & -x^3 \sin(xz) \end{bmatrix}$$

och speciellt i $(1,2,0)$ blir

$$(D\mathbf{f})(1,2,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ett approximativt värde beräknas enligt

$$\mathbf{f}(1.1, 1.9, 0.2) \approx \mathbf{f}(1,2,0) + (D\mathbf{f})(1,2,0) \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 1.2 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Vi söker egenvärdena och egenvektorerna till A:

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 9 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 14$$

med rötterna $\lambda_1 = 7$ och $\lambda_2 = -2$. A:s egenvärde är alltså $\lambda_1 = 7$ och $\lambda_2 = -2$. Nu hittar vi motsvarande egenvektorer.

$\lambda_1 = 7$:

$$A - 7I_2 = \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi ser att matrisens nollrum = λ_1:s egenrum spänns upp av vektorn $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -2$:

$$A + 2I_2 = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

λ_2:s egenrum späns upp av vektorn $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Matrisen A är diagonaliserbar dvs $A = PDP^{-1}$ med

$$P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(b) Systemets lösningar är

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 = c_1 e^{7t}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ur $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ fås $c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ varav

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Svar: $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3e^{7t} - 3e^{-2t} \\ 2e^{7t} + e^{-2t} \end{bmatrix}$.

4. (a) Vi räknar:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -4y, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 1.$$

Eftersom $\frac{\partial F_1}{\partial y} \neq \frac{\partial F_2}{\partial x}$ i området är F ej konservativt i det.

(b) Enligt Greens formel blir

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \int\int_D (1+4y)dxdy,$$

där D är halvcirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$.

För att beräkna dubbelintegralen går vi över till de polära koordinaterna $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Vårt nya integrationsområdet blir rektangeln $E = \{(r,\varphi) : 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le \pi\}$ och vi får alltså

$$\begin{aligned}\int\int_D (1+4y)dxdy &= \int\int_E (1+4r\sin\varphi)rdrd\varphi \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^\pi (1+4r\sin\varphi)rd\varphi\right)dr \\ &= \int_0^1 [r\varphi - 4r^2\cos\varphi]_0^\pi dr = \int_0^1 (r\pi + 8r^2)dr = \frac{\pi}{2} + \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

(c) Låt γ_2 vara det räta linjestycket från $(-1,0)$ till $(1,0)$ och $-\gamma_1$ vara moturs orienterade halvenhetscirkeln i övre halvplanet. Då $\int_{-\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ varav

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{-\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

För att beräkna $\int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ parametriserar vi kurvan γ_2 enligt $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i}$, $t \in [-1,1]$ och får

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^1 \mathbf{F}(t,0)\cdot \mathbf{r}'(t)dt = \int_{-1}^1 e^t dt = e - e^{-1}.$$

Det följer nu ur resultat i (b) att

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\frac{\pi}{2} - \frac{8}{3} + e - e^{-1}.$$

5. (a) Minstakvadratlösningar till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösningar till systemet $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$. Om $\hat{\mathbf{x}}$ är en sådan lösning, så $||A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}|| \le ||A\mathbf{x} - \mathbf{b}||$ för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ då A är en $m \times n$-matris.

(b) Ekvationssytemet i matrisform är $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Minstakvadratlösningen $\hat{\mathbf{x}}$ uppfyller $A^TA\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$. Vi räknar:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

och

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 17 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 17 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

6. Det gäller att bestämma största och minsta värdena av funktionen $d(x,y) = x^2 + y^2$ under bivillkoret $g(x,y) = 13x^2 + 13y^2 + 10xy - 72 = 0$. Eftersom ellipsen är kompakt antar d sina största oh minsta värde på kurvan. Dem minimerande/maximerande punkter (x,y) kan bestämmas med hjälp av Lagranges multiplikatormetod, $\nabla g(x,y) = (26x + 10y, 26y + 10x) \neq (0,0)$ överallt på ellipsen.

Vi får villkoret

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial d}{\partial x} & \frac{\partial d}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 26x + 10y & 26y + 10x \end{vmatrix} = 20(x^2 - y^2) = 0$$

varav $y = \pm x$. Efter insättningen av (x, x) och $(x, -x)$ i ellipsens ekvation får vi $36x^2 = 72 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ och respektive $16x^2 = 72 \Leftrightarrow x = \pm 3\sqrt{2}/2$.

Vi har $d(\pm x, \pm x) = 2x^2 = \begin{cases} 4, & x = \pm\sqrt{2} \\ 9, & x = \pm 3\sqrt{2}/2 \end{cases}$ och därmed blir största och minsta avståndet $\sqrt{9} = 3$ och respektive $\sqrt{4} = 2$.

7. Ytan parametriseras enligt $\mathbf{r}(a, t) = a \cos t\mathbf{i} + a \sin t\mathbf{j} + (1 - a)\mathbf{k}$, där $0 \leq a \leq 1$ och $0 \leq t \leq 2\pi$. Då blir $\mathbf{r}'_a = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{r}'_t = -a \sin t\mathbf{i} + a \cos t\mathbf{j}$ och $\mathbf{r}'_a \times \mathbf{r}'_t = a \cos t\mathbf{i} + a \sin t\mathbf{j} + a\mathbf{k}$ vilken pekar utåt. Låt $E = \{(a, t) : 0 \leq a \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi\}$ Flödesintegral beräknas enligt formeln

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathbf{F} \cdot dS &= \int\int_E \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}'_a \times \mathbf{r}'_t) dadt \\ &= \int\int_E (a \sin t\mathbf{i} + (1 - a)\mathbf{k}) \cdot (a \cos t\mathbf{i} + a \sin t\mathbf{j} + a\mathbf{k}) dadt \\ &= \int\int_E (a^2 \sin t \cos t + (1 - a)a) dadt = \int_o^1 \left[-a^2 \frac{\cos(2t)}{4} + (1 - a)at \right]_0^{2\pi} da \\ &= 2\pi \int_0^1 a(1 - a)da = 2\pi \left[\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

8. Se kursboken eller föreläsningsanteckningar.