MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2012-01-10 kl. 14.00–18.00
Tentamen | Telefonvakt: Richard Lärkäng
tel. 0703-088304

TMV036 Analys och Linjär Algebra K Kf Bt, del C

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 10/11 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens (10/11) webbsida senast 11/1. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Därefter kan tentorna granskas och hämtas på MV:s exp. öppen alla vardagar 9-13.

---

1. Låt $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 + 3xz$ och $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$.

(a) Ange en ekvation för tangentplanet till nivåytan $f(x, y, z) = 10$ i punkten $\mathbf{a}$. (3p)

(b) Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $\mathbf{a}$ i riktningen $\mathbf{u} = [2/3, 1/3, 2/3]^T$. (2p)

2. (a) Låt D vara den triangel som begränsas av y-axeln och linjerna $y = x$, $y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. (3p)
Beräkna dubbelintegralen

$$\int\int_D \cos y^2 dxdy.$$

(b) Beräkna volymen av den kropp K som begränsas av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ samt planen $z = 1$ och $z = 2$, dvs $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z, 1 \leq z \leq 2\}$. Skissa kroppen. (4p)

3. Låt A vara en 2×2-matris för vilken vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är egenvektorer med respektive egenvärde 1/2 och 1.

(a) Bestäm matrisen A. (4p)

(b) För varje positivt heltal n bestäm A^n samt gränsvärdet av A^n, då $n \to +\infty$. (3p)

4. (a) Anpassa med hjälp av minsta kvadratmetoden en linje $y = kx + l$ till punkterna $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 7)$. (3p)

(b) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$. Med hjälp av resultat i (a) bestäm den $\mathbf{y}$ i A:s kolonnrum som ligger närmast $\mathbf{b}$. (3p)

Var god vänd!

5. Bestäm största och minsta värde av funktionen $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2 - x + 4y$ på området $0 \leq y \leq x \leq 1$. (6p)

6. Låt $\mathbf{F}(x,y) = (y+2x)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

(a) Visa att vektorfältet $\mathbf{F}$ är konservativt i $\mathbb{R}^2$ genom att bestämma en potential φ till $\mathbf{F}$. (3p)

(b) Antag att partikeln rör sig längs kurvan $\gamma : \mathbf{r}(t) = (t, t^2)$ från origo till $(1,1)$. Beräkna arbetet $\int_\gamma F \cdot d\mathbf{r}$ som kraftfältet F uträttar på partikeln dels genom att använda potential i (a) och dels genom att utgå från definition av kurvintegralen. (4p)

7. Ange på formen $y = g(x)$ den kurva i planet som går genom $(1,1)$ och är vinkelrät mot alla nivåkurvor till $f(x,y) = x^4 + y$. (6p)

8. (a) Förklara vad som menas med att två vektorer i $\mathbb{R}^n$ är ortogonala. (6p)

(b) Bevisa Pythagoras sats i $\mathbb{R}^n$.

Lösningar

1. (a) Man verifierar lätt att $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$ ligger på yttan: $2^2 - 1^2 + 1^2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10$. Vi beräknar nu gradienten:

$$\nabla f(x, y, z) = (2x + 3z, -2y, 2z + 3x) \text{ och } \nabla f(2, 1, 1) = (7, -2, 8).$$

Tangentplanets ekvation blir då

$$7(x - 2) - 2(y - 1) + 8(z - 1) = 0.$$

Svar: $7x - 2y + 8z = 20$.

(b) Vi observerar först att $||u||^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$. Riktningsderivatan är $(D_u f)(2, 1, 1) = u \cdot \nabla f(2, 1, 1) = 28/3$.

2. (a) För att beräkna integralen integrerar vi först med avseende på x: vi har $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq \sqrt{\pi/2}\}$ och

$$\int\int_D \cos y^2 dxdy = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \left(\int_0^y \cos y^2 dx\right) dy = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} y \cos y^2 dy = \left[\frac{1}{2} \sin y^2\right]_0^{\sqrt{\pi/2}} = \frac{1}{2}.$$

(b) Volymen av den kropp K som beskrivs i uppgiften ges av trippelintegralen:

$$\begin{aligned}
\int\int\int_K dV &= \int_1^2 \left(\int\int_{x^2+y^2 \leq z} dxdy\right) dz = \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{z}} \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) rdr\right) dz \\
&= 2\pi \int_1^2 \left(\left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^{\sqrt{z}}\right) dz = \pi \int_1^2 zdz = \pi \left[\frac{1}{2} z^2\right]_1^2 = \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

3. (a) Låt

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } D = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Den sökande matrisen A är följande:

$$\begin{aligned}
A &= PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(b) För godtyckligt positivt heltal n har vi

$$\begin{aligned}
A^n &= (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (1/2)^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + (1/2)^n & 1 - (1/2)^n \\ 1 - (1/2)^n & 1 + (1/2)^n \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Eftersom $(1/2)^n \to 0$ då $n \to +\infty$

$$A^n \to \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ då } n \to +\infty.$$

4. (a) Det gäller att bestämma minstakvadratlösningar (k, l) till systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$. Minstakvadratlösningen $\hat{\mathbf{x}}$ uppfyller $A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$. Vi räknar:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

och

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 53 \\ 18 \end{bmatrix} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 53 \\ 18 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 16 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Svar: Linjen $y = 1.6x + 0.5$.

(b) Den $\mathbf{y}$ som ligger närmast A:s kolonnrummet ges av $\mathbf{y} = A\hat{\mathbf{x}}$, där $\hat{\mathbf{x}}$ är minstakavdratlösningen som bestämmdes i (a). Vi har alltså:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.6 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1 \\ 3.7 \\ 5.3 \\ 6.9 \end{bmatrix}.$$

5. Eftersom området D är kompakt antar f sina största oh minsta värde på D. De antas antingen i kritiska punkter i det inre av triangeln eller i punkter på randen. Vi börjar med att bestämma ev kritiska punkter till f.

Vi har

$$\nabla f(x, y) = (2x - 3y - 1, -3x + 2y + 4) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y = 1 \text{ och } -3x + 2y = -4$$

Det senare systemet har unik lösning: $x = 2$ och $y = 1$. Man ser lätt att punkten $(2, 1)$ ligger utanför triangeln D.

Vi undersöker nu de tre randsidorna:

$$R_1 : y = x, 0 \le x \le 1, \quad R_2 : x = 1, 0 \le y \le 1 \quad R_3 : y = 0, 0 \le x \le 1.$$

$R_1 : g_1(x) = f(x, x) = x^2 - 3x^2 + x^2 - x + 4x = -x^2 + 3x$. Vi har $g_1'(x) = -2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3/2$. Punkten ligger ej i intervallet $[0, 1]$. Funktionvärdena i ändpunkterna är $g_1(0) = 0$, $g_1(1) = 2$.
$R_2 : g_2(y) = f(1, y) = y^2 + y$. Vi har $g_2'(y) = 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1/2$. Punkten ligger ej i intervallet $0 \le y \le 1$. Funktionvärdena i ändpunkterna är $g_2(0) = 0$, $g_2(1) = 2$.
$R_3 : g_3(x) = f(x, 0) = x^2 - x$. $g_3'(x) = 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$. Punkten ligger i intervallet och $g_3(1/2) = -1/4$. Funktionvärdena i ändpunkterna är $g_3(0) = g_3(1) = 0$.

Vi har alltså att funktionens största och minsta värde på triangeln är 2 och respektive $-1/4$.

6. (a) Ett sätt att visa att fältet F är konservativt är att bestämma en potential, dvs en funktion $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sådan att

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= F_1(x,y) = y + 2x, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= F_2(x,y) = x. \end{aligned}$$

Den första ekvationen ger $\varphi(x,y) = xy + x^2 + C(y)$ för någon funktion $C(y)$. Insättning i den andra ekvationen ger $x + C'(y) = x$ varav $C'(y) = 0$ och därmed $C(y) = D$ för någon konstant D. Vi har därmed funnit att

$$\varphi(x,y) = xy + x^2 + D$$

är potentialer till det givna fältet.

(b) Den sökta kurvintegralen erhålles nu lätt:

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(1,1) - \varphi(0,0) = 2.$$

Integralen kan beräknas m h a kurvintegralens definition enligt:

$$\begin{aligned} \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt = \int_0^1 (t^2 + 2t, t) \cdot (1, 2t)dt \\ &= \int_0^1 (t^2 + 2t + 2t^2)dt = [t^3 + t^2]_0^1 = 2. \end{aligned}$$

7. En normal till nivåkurvan $f(x,y) = x^4 + y = C$ i en punkt (x,y) ges av $\nabla f(x,y) = (4x^3, 1)$. En normal till sökande kurvan $y = g(x)$ i (x,y) är $(g'(x), -1)$. För att kurvan $y = g(x)$ skall vara vinkelrätt mot alla nivåkurvorna $f(x,y) = C$ måste vektorerna $(4x^3, 1)$ och $(g'(x), -1)$ vara ortogonala i varje punkt (x,y). Vi får alltså:

$$0 = (4x^3, 1) \cdot (g'(x), -1) = 4g'(x)x^3 - 1 \Leftrightarrow g'(x) = 1/4x^3 \Leftrightarrow g(x) = -1/(8x^2) + C.$$

Vilkoret att kurvan $y = g(x)$ går genom $(1,1)$ ger $1 = g(1) = -1/8 + C$, varav $C = 9/8$.

Svar: $y = -1/(8x^2) + 9/8$.

8. Se kursboken eller föreläsningsanteckningar.