

TMV036/MVE350 Analys och Linjär Algebra K Kf Bt KI, del C

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från duggor 12/13 inkluderas.)

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Därefter kan tentorna granskas och hämtas på MV:s exp. öppen alla vardagar 9-13.

1. (a) Låt $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + xy$. Ange en normal till nivåkurvan $f(x, y) = 7$ i punkten $(3, 2)$. (2p)

(b) Beräkna $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$ för $f(x, y, z) = x^3 \sin(yz) + (x^2 + y^2)e^{x+z}$. (2p)

(c) Beräkna längden av parametriserade kurvan $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + \sqrt{2} \sin t \mathbf{j} + \sqrt{2} \sin t \mathbf{k}$, $t \in [0, 2\pi]$. (2p)

(d) Hitta arean av den del av planet $2x + 3y + z = 1$ som ligger inuti cylindern $x^2 + y^2 = 1$. (3p)

2. (a) Definiera vad som menas med att reellvärd funktion $f(x, y)$ är differentierbar i (a, b) . Förklara vad som menas med linjärisering för $f(x, y)$? (2p)

(b) Beräkna approximativt $(0.99 \cdot e^{0.2})^8$ genom att bestämma linjärisering av en lämplig funktion. (3p)

3. (a) Beräkna dubbelintegralen (3p)

$$\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2} dA$$

där D är området som ges av $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $x \leq y$.

- (b) Beräkna trippelintegralen (3p)

$$\iiint_K \frac{dV}{(2 + x + y + z)^3}$$

där K är kroppen som begränsas av koordinatplanen och planet $x + y + z = 2$, dvs $K = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 2\}$.

4. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & c \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Bestäm matrisens egenvärden. (2p)

- (b) Undersök om det finns värden på c för vilka A är diagonaliserbar och ange för eventuella sådana c en matris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^{-1}$. (4p)

Var god vänd!

5. Vi ska bygga en rätvinklig låda utan lock. Lådan ska ha sidolängderna x , y och z . (6p)
Själva stommen till lådan ska tillverkas av 12 tunna rör. Den totala längden rör vi ska använda är 56 meter. Bestäm x , y och z så att arean av lådans utsida (de fyra vägarna plus botten) ska bli största möjliga.

6. Låt $\mathbf{F}(x, y) = (e^x \sin y - y)\mathbf{i} + (e^x \cos y - 1)\mathbf{j}$.

(a) Låt γ vara linjestycket från $(0, 0)$ till $(2, 0)$. Beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. (2p)

(b) Med hjälp av Greens formel och resultat i (a) beräkna det arbete som \mathbf{F} uträttar (3p)
för att förflytta en partikel längs halvcirkeln $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, från $(2, 0)$
till $(0, 0)$.

(c) Är \mathbf{F} konservativt i \mathbb{R}^2 ? Motivera väl. (1p)

7. Avgör om följande två gränsvärden existerar eller ej och bestäm i förekommande (6p)
fall deras värde (tydlig motivering krävs!)

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^4}, \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

8. (a) Låt $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ vara parvis ortogonala vektorer i \mathbb{R}^n . Visa att $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ (3p)
är en bas i \mathbb{R}^n .

(b) Antag att $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ är en ortonormerad mängd av vektorer i \mathbb{R}^n . Visa att (3p)
om $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ så är $\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \dots + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_n)\mathbf{u}_n$ och

$$\|\mathbf{a}\|^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_1)^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_2)^2 + \dots + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_n)^2$$

Motivera väl.

Lycka till!
Lyudmila T

Lösningar

1. (a) En normal till nivåkurvan ges av $\text{grad}f(3, 2)$. Vi får

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -4y + x$$

och $\text{grad}f(3, 2) = (8, -5)$.

- (b)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= x^3 \cos(yz)y + (x^2 + y^2)e^{x+z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3 \cos(yz)y + (x^2 + y^2)e^{x+z}) \\ &= 3x^2 y \cos(yz) + 2xe^{x+z} + (x^2 + y^2)e^{x+z} \\ &= 3x^2 y \cos(yz) + (x^2 + 2x + y^2)e^{x+z}\end{aligned}$$

- (c) Vi har $\mathbf{r}'(t) = -2 \sin t \mathbf{i} + \sqrt{2} \cos t \mathbf{j} + \sqrt{2} \cos t \mathbf{k}$ och $\|\mathbf{r}'(t)\| = (4 \sin^2 t + 2 \cos^2 t + 2 \cos^2 t)^{1/2} = 2$. Därmed blir kurvans längd lika med $\int_0^{2\pi} \|\mathbf{r}'(t)\| dt = 4\pi$.
- (d) Ytan har följande parametrisering $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, 1 - 2u - 3v)$, $(u, v) \in D = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$. Vidare

$$\mathbf{r}'_u = (1, 0, -2), \quad \mathbf{r}'_v = (0, 1, -3) \quad \text{och} \quad \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = (2, 3, 1).$$

Ytans area blir alltså

$$S = \iint_D \|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\| dA = \iint_D \sqrt{4 + 9 + 1} dA = \sqrt{14}(\text{arean av } D) = \sqrt{14}\pi.$$

2. (a) Se kursboken

- (b) Betrakta linjäriseringen $L(x, y)$ av $f(x, y) = (xe^y)^8$ i $(1, 0)$. Vi får $f'_x = 8x^7 e^{8y}$, $f'_y = 8x^8 e^{8y}$ och

$$L(x, y) = f(1, 0) + f'_x(1, 0)(x - 1) + f'_y(1, 0)(y - 0) = 1 + 8(x - 1) + 8y.$$

Detta ger att

$$(0.99 \cdot e^{0.2})^8 = f(0.99, 0.2) \approx L(0.99, 0.2) = 1 + 8(-0.01) + 8 \cdot 0.2 = 2.52.$$

3. (a) Vi går över till de polära koordinaterna $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Vårt nya integrationsområde blir rektangeln $E = \{(r, \varphi) : 1 \leq r \leq 2, \pi/4 \leq \varphi \leq 5\pi/4\}$ och vi får alltså

$$\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2} dA = \iint_E r^3 \cdot r dA = \int_1^2 \left(\int_{\pi/4}^{5\pi/4} r^4 d\varphi \right) dr = \pi \left[\frac{r^5}{5} \right]_1^2 = \frac{31\pi}{5}.$$

- (b) Projektionen av kroppen K på xy -planet är triangeln $T = \{(x, y) : x + y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$. Trippelintegralen kan alltså beräknas enligt

$$\begin{aligned}
\iiint_K \frac{dV}{(2+x+y+z)^3} &= \iint_T \left(\int_0^{2-x-y} \frac{dz}{(2+x+y+z)^3} \right) dx dy \\
&= \iint_T \left[-\frac{1}{2(2+x+y+z)^2} \right]_0^{2-x-y} dx dy \\
&= -\frac{1}{2} \iint_T \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{(2+x+y)^2} \right) dx dy \\
&= -\frac{1}{32} (\text{arean av } T) + \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} \frac{1}{(2+x+y)^2} dy \right) dx \\
&= -\frac{1}{16} + \frac{1}{2} \int_0^2 \left[-\frac{1}{(2+x+y)} \right]_0^{2-x} dx \\
&= -\frac{1}{16} - \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(2+x)} \right) dx \\
&= -\frac{1}{16} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4}x - \ln|2+x| \right]_0^2 = \frac{8 \ln 2 - 5}{16}.
\end{aligned}$$

Vid beräkningen av dubbelintegralen använder vi att T är ett y -enkelt område:
 $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x$.

4. (a) Vi löser den karakteristiska ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -1 & c \\ 0 & 4 - \lambda & 3 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)((4 - \lambda)(-\lambda) + 3) = 0$$

om $\lambda = 1$ eller $\lambda = 3$. Matrisens egenvärde (oavsett vad parameter c är) är $\lambda = 1$ och $\lambda = 3$.

- (b) Vi bestämmer A 's egenvektorer. Egenvektorerna till $\lambda = 3$ bestäms ur ekvationen $(A - 3I)\mathbf{x} = 0$:

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & -1 & c \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & c+3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

och alla lösningar till systemet ges av $\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} c+3 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

Egenvektorerna till $\lambda = 1$ bestäms ur ekvationen $(A - I)\mathbf{x} = 0$:

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & c \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & c+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser att om $c \neq -1$ har matrisen en icke pivot kolonn och egenrummet spänns upp av en egenvektor. Detta leder att för $c \neq -1$ finns det högst två linjärt oberoende egenvektorer för matrisen A och därmed blir A ej diagonaliserbar.

Om $c = -1$ så ges de samtliga egenvektorerna till $\lambda = 1$ av $\begin{bmatrix} t \\ -s \\ s \end{bmatrix} =$

$t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, (t, s) \neq (0, 0)$. I detta fall finns det 3 linjärt oberoende

egenvektor till A : t.ex.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

och $A = PDP^{-1}$ där

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Vi har $4x+4y+4z = 56$ och arean av lådans utsida ges av $A(x, y, z) = xy+2xz+2yz$. Det gäller att bestämma det största värdet av $A(x, y, z)$ under bivillkoren $x+y+z = 14$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Ur $x + y + z = 14$ får vi $z = 14 - x - y$. Insättningen i $A(x, y, z)$ ger att arean blir

$$S(x, y) = xy + 2x(14 - x - y) + 2y(14 - x - y) = 28x + 28y - 2x^2 - 2y^2 - 3xy.$$

Problemmet reduceras till att bestämma största värde för funktionen $S(x, y)$ i området $\{(x, y) : x > 0, y > 0, 14 - x - y > 0\}$ som är en öppen triangel. Låt D var triangeln med randen. En sats från kursen ger oss att $S(x, y)$ har ett största värde på D och det antas antingen i kritiska punkter i det inre av D eller på randen. Vi börjar med att bestämma kritiska punkter: $S'_x = 28 - 4x - 3y = 0$ och $S'_y = 28 - 4y - 3x = 0$. Systemet har en lösning $x = y = 4$ och $S(4, 4) = 112$.

Vi undersöker sedan tre randbitarna:

$$R_1 : y = 0, 0 \leq x \leq 14; \quad R_2 : y = 14 - x, 0 \leq x \leq 14 \text{ och } R_3 : x = 0, 0 \leq y \leq 14.$$

$R_1 : g_1(x) = f(x, 0) = 28x - 2x^2$. Vi har $g'_1(x) = 28 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 7$. Den kritiska punkter ligger i intervallet $0 \leq x \leq 14$ och $g_1(7) = 98$. Funktionvärdena i ändpunkterna är $g_1(0) = g_1(14) = 0$. Därmed blir funktionens största värde på R_1 98.

Av symmetri skäll gäller detta även för randbiten R_3 .

$R_2 : g_2(x) = f(x, 14-x) = 14x - x^2$. Vi har $g'_2(x) = 14 - 2x \Leftrightarrow x = 7$ och $g_2(7) = 49$. I ändpunkterna har vi $g_2(0) = g_2(14) = 0$.

Vi har alltså att funktionens största värde på det slutna området är 112 som antas i den inre punkten $(4, 4)$. Detta blir även den största värde i den öppna triangeln.

Svar: Största arean är 112 då $x = y = 4$ och $z = 6$.

6. (a) γ parametreras enligt: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$, $t \in [0, 2]$. Därmed

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^2 (0\mathbf{i} + (e^t - 1)\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i} + 0\mathbf{j}) dt = 0$$

- (b) Låt C vara den positivt orienterade randen av halvcirkelskivan $D: (x-1)^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$. Enligt Greens formel

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y - 1) - \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y - y) \right) dA = \iint_D dA = \text{Arean } D = \pi/2.$$

Randen C består av kurvan γ från (a)-delen och moturs orienterad halvcirkeln $\sigma: (x-1)^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$. Vi har alltså

$$\text{Arbetet} = \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \pi/2 - 0 = \pi/2.$$

(c) \mathbf{F} är inte konservativt, ty kurvintegralen längs slutna kurvan C är inte noll.

7. (a) Vi ska se vad som händer med $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^4}$ när (x, y) närmar sig $(0, 0)$ från olika håll: när (x, y) närmar sig origo längs x -axeln så är punkterna på formen $(x, 0)$, och vi får

$$f(x, 0) = \frac{x^2}{x^2+0} = 1 \rightarrow 1;$$

när (x, y) närmar sig $(0, 0)$ längs y -axeln, vi har punkter $(0, y)$ där y går mot 0 och

$$f(0, y) = \frac{0}{0+y^4} = 0 \rightarrow 0.$$

Detta visar att funktionen saknar gränsvärdet då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

- (b) Låt $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Vi har

$$0 \leq |f(x, y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0 \text{ då } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

Detta visar att $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

8. (a) Se kursboken hur man visar att $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ är linjärt oberoende. n stycken linjärt oberoende vektorer i \mathbb{R}^n bildar en bas i \mathbb{R}^n .
- (b) Enligt (a) är $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ en bas i \mathbb{R}^n . Då om $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ så är $\mathbf{a} = c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n$ för några konstanter c_1, \dots, c_n . Multiplicera skalärt båda leden av likheten med \mathbf{u}_k och får

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_k = c_k \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k = c_k,$$

ty $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_k = 0$ om $i \neq k$ och $\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k = 1$.

Vi har alltså $\mathbf{a} = c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n$ med $c_k = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_k$, $k = 1, \dots, n$.

Den andra likheten följer ur: om $c_k = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_k$ så är

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}\|^2 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n) \cdot (c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n) \\ &= c_1^2\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \dots + c_n^2\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_n \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_1)^2 + \dots + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_n)^2. \end{aligned}$$

Vi använder igen att $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_k = 0$ om $i \neq k$ och $\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k = 1$