Mån Lv4

$$q_x = UA\Delta T$$

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_h} + \frac{L_1}{k_1} + \dots + \frac{1}{h_c}$$

Värmeledning genom vägg med flera "lager"

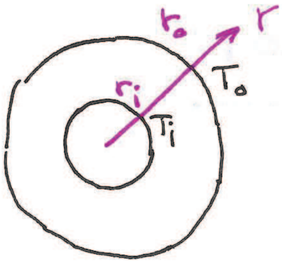
Analogi: elektricitetslära

$$\sum R = R_1 + R_2 + \dots + R_N$$

seriekoppling!

Ledning: Cylindervägg

stationärt: 1D



$$\underbrace{q_r = -kA\frac{dT}{dr}}_{\text{konstant ty stationärt}}$$

Fouriers lag i radell riktning

$$A = 2\pi r L$$

$$\Rightarrow q_r = -k \cdot 2\pi r L \frac{dT}{dr} \rightarrow \int_{r_i}^{r_o} q_r \frac{dr}{r} = \int_{T_i}^{T_o} -k 2\pi L \, dT$$

$$q_r \left[\ln r\right]_{r_i}^{r_o} = -2\pi k L \left[T\right]_{T_i}^{T_o}$$

$$q_r = \frac{2\pi k L (T_i - T_o)}{\ln (r_o/r_i)}$$

Ex. Värmeväxlar - rör

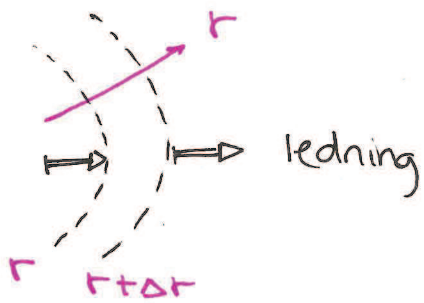
$$q_r = \underbrace{h_o A_o (T_h - T_o)}_{\text{Konvektion på utsidan}} = \underbrace{\frac{2\pi k L (T_o - T_i)}{\ln(r_o/r_i)}}_{\text{Välj } \Delta T \text{ så att det blir positivt! dvs } T_h - T_c \text{, inte } T_c - T_h} = \underbrace{h_i A_i (T_i - T_c)}_{\text{Konvektion på insidan}}$$

$$q = U_o A_o \Delta T$$

$$U_o = \frac{1}{\frac{A_o}{A_i h_i} + A_o \ln \frac{r_o}{r_i} / 2\pi k L + \frac{1}{h_o}}$$

Temperaturprofil i rörväggen $T(r)$

Värmebalans



$$\cancel{Ack} = In - Ut + \cancel{Prod} \longrightarrow In = Ut$$

0, stationärt

$$q_r \big|_r = q_r \big|_{r+\Delta r}$$ Dela med $\Delta r \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \frac{dq_r}{dr} = 0$$

Integration: $q_r = C_1$

$$-(k\, 2\pi r L)\frac{dT}{dr} = C_1$$

Integration: $T(r) = C_1' \ln r + C_2$

Randvillkor

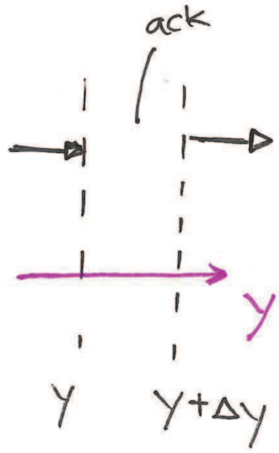
$$T(r_i) = T_i$$
$$T(r_o) = T_o$$

$$\Rightarrow T(r) = T_i - \frac{T_i - T_o}{\ln(r_o/r_i)} \ln\left(\frac{r}{r_i}\right)$$

{ Temperaturprofilen är ej rät! Ty tvärsnittsytan varierar och är inte konstant! }

Instationär värmeledning

Platta, 1D



Balans: $\text{Ack} = \text{In} - \text{Ut} + \cancel{\text{Prod}} \to 0$

Sökt: Temp-profil, $T(y,t)$?

$$\text{Ack} = \text{In} - \text{Ut} = q_y\big|_y - q_y\big|_{y+\Delta y}$$

$$\underbrace{(A\Delta y)\rho c_p \Delta T}_{\text{Ack}} = \Big(\underbrace{q_y\big|_y}_{\text{In}} - \underbrace{q_y\big|_{y+\Delta y}}_{\text{ut}}\Big)\Delta t$$

Dela med ~~$A\Delta y \Delta x$~~ $A \Delta y \Delta t \rightarrow 0$

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{A}\left(\frac{-\partial q_y}{\partial y}\right)$$

$$\left\{ q_y = -KA\frac{dT}{dy} \right\} \rightarrow \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = K\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Randvillkor: $T(y,0) = T_0$

$T(0,t) = T_1$

$\left(T(Y,t) = T_0 \right)$ $T(\infty,t) = T_0$

↳ 'Fuskar' och antar att plattan är 'oändligt tjock'!

Lösning:

$$\frac{T(y,t)-T_0}{T_1 - T_0} = 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\alpha t}}\right) = \mathrm{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

α - värmediffusiviteten $\frac{K}{\rho C_p}$ $[m^2/s]$

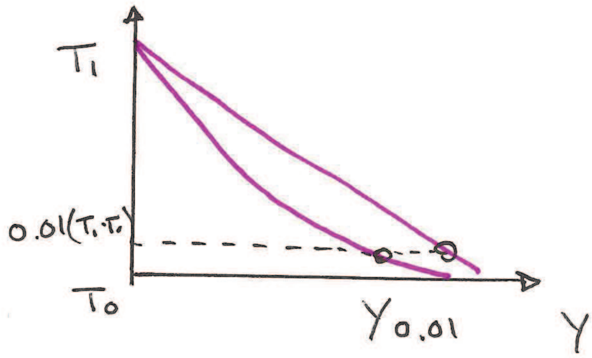
erf - error funktion

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-z'^2)\,dz'$$

$$\begin{cases} \mathrm{erf}(0) = 0 \\ \mathrm{erf}(\infty) = 1 \end{cases}$$

Hur fort sker värmeutbredningen med ledning (enkelt mått)

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = 0.01$$



$$1 - \text{erf}\left(\frac{y_{0.01}}{2\sqrt{\alpha t}}\right) = 0.01 \xRightarrow{\text{tabell}} \frac{y_{0.01}}{2\sqrt{\alpha t}} \sim 2$$

$$\rightarrow y_{0.01} \simeq 4\sqrt{\alpha t}$$

Vilket material, järn eller luft, transportear värme bäst?

	Järn (App. H)	Luft (App I)
k	51.2	$2.6 \cdot 10^{-2}$
ρ	$7.9 \cdot 10^{3}$	1.2
c_p	$4.2 \cdot 10^{2}$	$1.0 \cdot 10^{3}$
α	$1.7 \cdot 10^{-5}$	$2.2 \cdot 10^{-5}$

Fortast: luft (ty $\alpha_{luft} > \alpha_{Fe}$)

Högst värmeflöde vid stationärt Fe