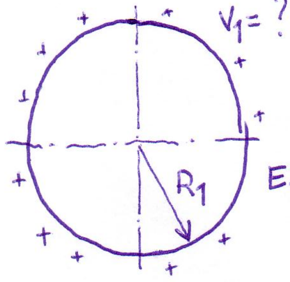
Fråga 1

(1) En kula fritt i luft : $R_1 = 6\,cm$

$V_1 = ?$ $Q = ?$



$E_1 = 20\,kV/cm = 20 \cdot \frac{10^3\,V}{10^{-2}\,m} = 2 \cdot 10^6\,V/m$

från Gauss låg :

$$E(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2}$$

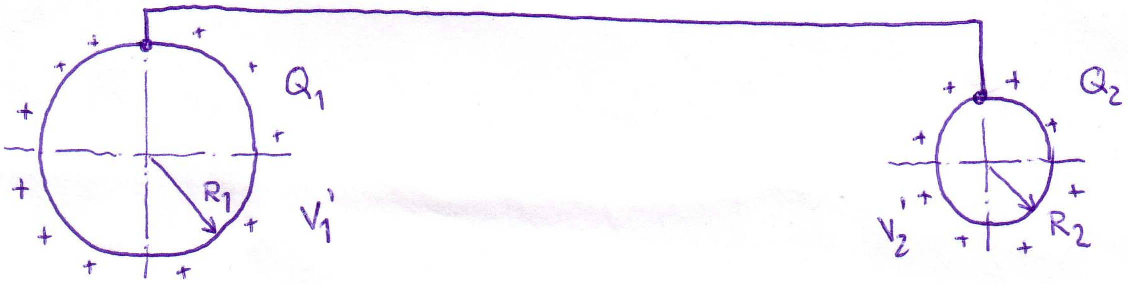
$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R}$$

överslag : $E(R=R_1) = 20\,kV/cm$

$$Q = E(R_1) \cdot 4\pi\varepsilon_0 R_1^2 = 2 \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot (0{,}06)^2 = \underline{\underline{8 \cdot 10^{-7}\,C}}$$

$$V(R_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{E(R_1) \cdot 4\pi\varepsilon_0 R_1^2}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = E(R_1) \cdot R_1 = 2 \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 10^{-2} = \underline{\underline{12 \cdot 10^4\,V}}$$

(2) koppling med en annan kula : $R_2 = \frac{1}{2} R_1 = 3\,cm$



efter koppling :

$$Q_1 + Q_2 = Q$$

$$V_1' = V_2'$$

$$V_1' = V_1'(R_1) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

$$V_2' = V_2'(R_2) = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

Fråga 1 : forts.

$$V_1' = V_2' \Rightarrow \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$$

$$Q_2 = Q_1 \cdot \frac{R_2}{R_1} = \underline{\underline{\frac{Q_1}{2}}} \quad \left(R_2 = \tfrac{1}{2} R_1\right)$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{3}{2} Q_1 \qquad Q_1 = \frac{2}{3} Q = 5{,}3 \cdot 10^{-7} \ \text{C}$$

$$Q_2 = \frac{1}{3} Q = 2{,}7 \cdot 10^{-7} \ \text{C}$$

$$V_1'(R_1) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{2/3\, Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{2}{3} V(R_1) = \frac{2}{3} \cdot 12 \cdot 10^4 = \underline{\underline{8 \cdot 10^4 \ \text{V}}}$$

$$V_2'(R_2) = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{1/3\, Q}{4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1}{2}} = \frac{2}{3} V(R_1) = \underline{\underline{8 \cdot 10^4 \text{V}}}$$

(gäller att $V_1'(R_1) = V_2'(R_2)$)

$$E_1'(R_1) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} = \frac{2/3\, Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} = \frac{2}{3} E_1(R_1) = \frac{2}{3} \cdot 20 \ \text{kV/cm} = \underline{\underline{13 \ \text{kV/cm}}}$$

$$E_2'(R_2) = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} = \frac{1/3\, Q}{4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1^2}{4}} = \frac{4}{3} E_1(R_1) = \frac{4}{3}\, 20 \ \text{kV/cm} = \underline{\underline{26{,}7 \ \text{kV/cm}}}$$

Vi fick överslag på andra kulan.

Vi ~~an~~ använde stor avstånd för att försumma bidrag från kula 2 till V och E nära kula 1 och vice versa.

Annars måste vi använda "superposition".

2

KVL ger:

$$\begin{cases} (R_a+r)(I_a-I)-R_c\cdot I-(I_b+I)R_b=0 & (1)\\ R_a\cdot I_a - I_b\cdot R_b + I\cdot R_c = 0 & (2)\\ U - I_b\cdot R_b-(I_b+I)\cdot R_b = 0 & (3)\end{cases}$$

Omskrivning av (3) ger:

$$U = R_b\cdot 2I_b + IR_b$$

(4) $I_b=\left(\frac{U}{R_b}-I\right)\cdot\frac{1}{2}$ in i (2)

$$R_aI_a+\frac{R_b}{2}\left(I-\frac{U}{R_b}\right)+I\cdot R_c=0$$

(5) $I_a=\frac{1}{2R_a}\cdot(U-R_b I)-I\cdot\frac{R_c}{R_a}$

(4) och (5) in i (1)

(6) $\frac{(R_a+r)}{2R_a}\cdot(U-R_b\cdot I)-I\cdot\frac{R_c(R_a+r)}{R_a}-I(R_a+r+R_c+R_b)$

$$-\frac{R_b}{2}\left(\frac{U}{R_b}-I\right)=0$$

Insättning av $r=0$ i (6) ger:

$$\cancel{\frac{U}{2}}-\frac{R_b}{2}\cdot I - I\cdot R_c - I\cdot(R_a+R_c+R_b)-\cancel{\frac{U}{2}}+\frac{R_b\cdot I}{2}=0$$

$$I\cdot\left(\frac{R_b}{2}-R_a-2\cdot R_c-R_b-\frac{R_b}{2}\right)=0$$

Så $I=0$ när $r=0$ V.S.B.

Ekvation (6) kan skrivas

$$\cancel{\frac{U}{2}}+\frac{U}{2R_a}\cdot r-\frac{R_b\cdot I\cdot(R_a+r)}{2R_a}-I\cdot\left(\frac{R_c(R_a+r)}{R_a}+R_a+R_c+\frac{R_b}{2}+r\right)-\cancel{\frac{U}{2}}=0$$

$$I\cdot\underbrace{\left(\frac{R_b\cdot(R_a+r)}{2R_a}+\frac{R_c(R_a+r)}{R_a}+R_a+R_c+\frac{R_b}{2}+r\right)}_{\approx\left(\frac{R_b}{2}+R_c+R_a+R_c+\frac{R_b}{2}\right)}=\frac{U}{2R_a}\cdot r$$

Så I blir proportionell mot r V.S.B.

3

$$u_{ut} = -i_1 R_3 + i_2 R_4$$
$$u_1 = i_1 R_1 + i_2 R_4$$
$$u_2 = i_2 R_2 + i_2 R_4$$

$$\Rightarrow i_1 = \frac{u_1 - u_{ut}}{R_1 + R_3}$$

$$\Rightarrow i_2 = \frac{u_2}{R_2 + R_4}$$

$$u_{ut} = -i_1 R_3 + i_2 R_4$$

$$\Rightarrow u_{ut} = -\left(\frac{u_1 - u_{ut}}{R_1 + R_3}\right) R_3 + \left(\frac{u_2}{R_2 + R_4}\right) R_4$$

$$\Rightarrow u_{ut}\left(1 - \frac{R_3}{R_1 + R_3}\right) = -u_1\left(\frac{R_3}{R_1 + R_3}\right) + u_2\left(\frac{R_4}{R_2 + R_4}\right)$$

$$\Rightarrow u_{ut}\left(\frac{R_1}{R_1 + R_3}\right) = u_2\left(\frac{R_4}{R_2 + R_4}\right) - u_1\left(\frac{R_3}{R_1 + R_3}\right)$$

$$\Rightarrow u_{ut} = \left(\frac{R_1 + R_3}{R_2 + R_4}\right)\left(\frac{R_4}{R_1}\right) u_2 - \left(\frac{R_3}{R_1}\right) u_1$$

// If $R_1 = R_2 \equiv R_{12}$
and $R_3 = R_4 \equiv R_{34}$

Then $$u_{ut} = \left(\frac{R_{34}}{R_{12}}\right) u_2 - \left(\frac{R_{34}}{R_{12}}\right) u_1$$

$$u_{ut} = \frac{R_{34}}{R_{12}}\left(u_2 - u_1\right)$$

$$\frac{R_{34}}{R_{12}} = 1 \Rightarrow u_{ut} = u_2 - u_1$$

4

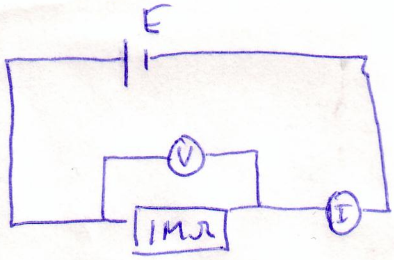
Fluke 75 som amperemeter $R_{inre} = 200\,\Omega$

HP 3440A som voltmeter $R_{inre} = 10\,M\Omega$

Ska mäta resistansen på ett 1MOhms motstånd

Två sätt att koppla:

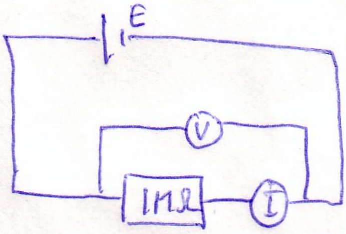
1



Resistor, volt- och amperemeter kan ersättas med en enda resista[ns] med värdet:

$$R_{tot1} = \frac{10\cdot 10^6}{11} + 200$$

2



$$R_{tot2} = \frac{1000200 \cdot 10\cdot 10^6}{1000200 + 10\cdot 10^6}$$

Idealt borde man mäta $V = E$ och $I = \frac{E}{1\cdot 10^6} \Rightarrow R = \frac{E}{E/1\cdot 10^6} = 1M\Omega$

I fall 1 mäter man $V = E \cdot \frac{\frac{10\cdot 10^6}{11}}{\frac{10\cdot 10^6}{11} + 200}$; $I = \frac{E}{R_{tot1}}$

medför total resistans $R = \frac{V}{I} = \frac{10\cdot 10^6/11 \cdot \cancel{R_{tot1}}}{\cancel{10\cdot 10^6/11 + 200}} = \frac{10\cdot 10^6}{11} = 0{,}909\ M\Omega$

I fall 2 mäter man $V = E$; $I = \frac{E}{R_{tot2}} \cdot \frac{10\cdot 10^6}{1000200 + 10\cdot 10^6}$

Medför total resistans: $R = \frac{V}{I} = \frac{(1000200 + 10\cdot 10^6)\, R_{tot2}}{10\cdot 10^6} =$

$$= \frac{\cancel{(1000200 + 10\cdot 10^6)}(1000200 \cdot \cancel{10\cdot 10^6})}{\cancel{10\cdot 10^6}\,\cancel{(1000200 + 10\cdot 10^6)}} = 1000200\ \Omega$$

Fall 1 avviker med 91 kΩ från rätt värde. Fall 2 avviker däremot endast med 200Ω från rätt värde så koppling enligt metod 2 rekommenderas.

5)

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \overset{h(x,y)}{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \overset{g(x,y)}{\begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ x & -3 & -3 & 0 & x \\ x & -3 & -3 & 0 & x \\ x & -3 & -3 & 0 & x \\ x & x & x & x & x \end{bmatrix}}$$

till exempel :

$$g(2,2) = f(1,1) \cdot h(1,1) + f(1,2) \cdot h(1,2) + f(1,3) \cdot h(1,3) + f(2,1) \cdot h(2,1) + f(2,2) \cdot h(2,2) + f(2,3) \cdot h(2,3) + f(3,1) \cdot h(3,1) + f(3,2) \cdot h(3,2) + f(3,3) \cdot h(3,3)$$

$$g(2,2) = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-1) + 0 + 0 + (-1) + 0 + 0 = \underline{\underline{-3}}$$

$h(x,y) \rightarrow$ filter som upptäcker kanter i bilder