TENTAMEN I BIOREAKTIONSTEKNIK (KKR090)

Torsdag 18/12, 2013 08:30-13:30 Maskinsalarna

Tentamenstid = 5 h

Carl Johan Franzén kommer att besöka tentamenslokalen ca kl 09:30 och ca kl 11:30.

Examinator: Claes Niklasson

Tentamensansvarig: Carl Johan Franzén (0730-556851)

Lösningar kommer anslås på Kemitekniks anslagstavla, plan 2 forskarhus 2, vid tentamens sluttid.

Granskning av tentamensrättning kan ske tisdag 21/1 kl 13:30-15:00 i seminarierummet Industriell bioteknik / Systembiologi (plan 6 KB Forskarhus 1 över passagen till plan 3 i Fysikhuset).

Preliminära betygsgränser:

<30 p	**betyg U**
30-39 p	**betyg 3**
40-49 p	**betyg 4**
50-60 p	**betyg 5**

Tillåtna hjälpmedel: (Tömd) Räknedosa

Uppgift 1 (6 poäng)

Teoriuppgift

a) Vad karakteriserar ostrukturerade, biokemiskt strukturerade, osegregerade och segregerade kinetikmodeller för mikrobiell tillväxt och metabolism?

b) Hur bestämmer man kvaliteten på en kinetikmodell?

a) Vad karakteriserar ostrukturerade, biokemiskt strukturerade, osegregerade och segregerade kinetikmodeller för mikrobiell tillväxt och metabolism?

Svar: Ostrukturerade: Cellerna anses vara oföränderliga (dvs hänsyn tas inte till förändringar i cellernas egenskaper). Typiska black box – modeller, t.ex. Monodkinetik.

Biokemiskt strukturerade: Cellernas egenskaper kan förändras, oftast innebär detta att man inkluderar intracellulära halter av olika metaboliter, totalt halt protein och RNA, aktivitet av vissa enzymer.

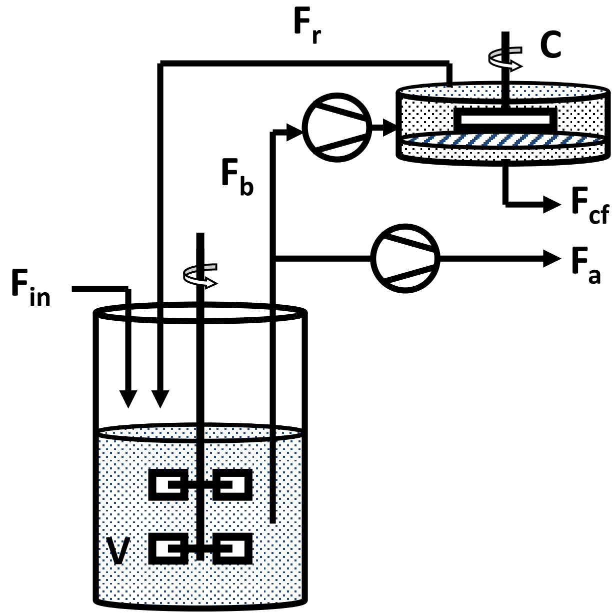
Osegregerade: Alla celler är likadana

Segregerade: Det finns flera olika typer av celler, t.ex. unga och gamla; aktiva och inaktiva; aktivt växande celler och sporer; filamentösa svampceller i änden av filament, mitt i filament och vid förgreningspunkter av flera filament.

b) Hur bestämmer man kvaliteten på en kinetikmodell?

Svar: ANOVA, t-tester, konfidensintervall, residualanalys, r^2, r^2_{adj}, förmåga att prediktera nya försök (dvs försök som inte använts vid parameterbestämningen)

Uppgift 2 (10 poäng)



Recirkulering av celler i en kontinuerlig odling kan vara fördelaktigt i vissa fall, t.ex. om man vill uppnå mycket höga omsättningsgrader av substratet, eller ifall mediet innehåller inhiberande ämnen. Praktiskt kan detta utföras genom att man pumpar cellsuspensionen över ett filter, där cellfritt förbrukat medium tas ut (F_{cf}) och den kvarvarande cellsuspensionen återförs till bioreaktorn. För att hålla konstant volym tas en del av cellsuspensionen ut från bioreaktorn genom en avtappning (F_a).

Vid ett sådant försök var det färska inflödet till 0.2 liter/timme. Den totala volymen cellsuspension i bioreaktorn, recirkulationsloopen och filterenheten var 2.5 liter. 1% av det färska inflödet togs ut genom avtappningsflödet F_a.

Av flödet in till filtret (F_b) gick 90% av flödet, samt alla celler, tillbaka som recirkulerande flöde (F_r).

Cellerna växte enligt Monodkinetik, med μ_{max} =0.2 h^{-1} och K_S = 0.2 g/l. Biomassautbytet på förbrukat substrat hade i ett annat försök visat sig vara $Y_{X/S}$ = 0.15 g/g.

Förutsäg med denna bakgrund:

a) Den specifika tillväxthastigheten vid steady state.

b) Halterna av substrat och biomassa i reaktorn samt i det recirkulerande flödet F_r

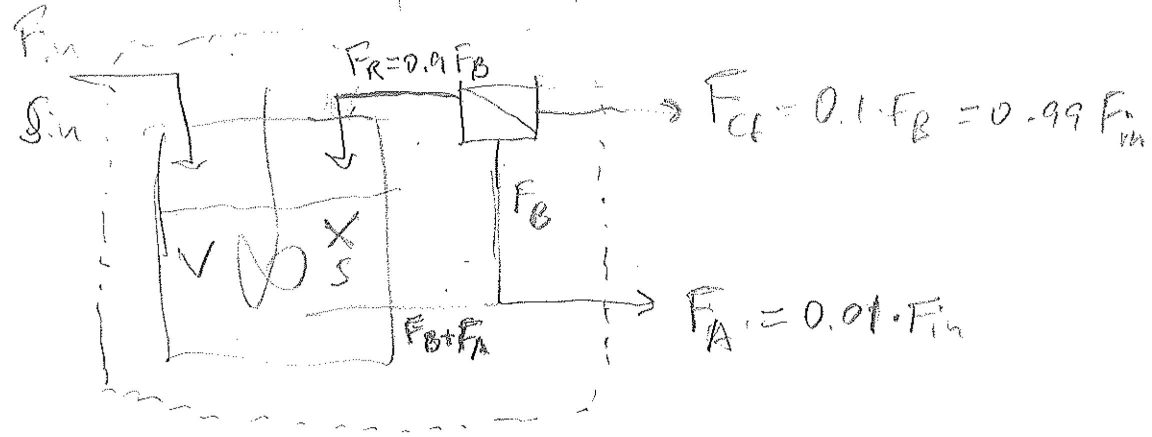
c) Vad skulle hända med den specifika tillväxthastigheten ifall man skulle öka F_a till 5% av F_{in}?

d) Vilka praktiska begränsningar tror du ett sådant odlingssystem har?

e) Vad tror du skulle hända med biomassautbytet om F_a är väldigt låg? Varför?

(Förutsägelserna a-c måste förstås motiveras genom beräkningar)

(2)



$Y_{X/S} = 0.15$ g/g

$S_{in} = 100$

$\mu = \frac{\mu_{max} \cdot S}{K_s + S}$

$\mu_{max} = 0.2 h^{-1}$

$K_s = 0.15$ g/g

$F_A + F_{CF} = F_{in} \Rightarrow F_{CF} = 0.99 F_{in}$

$\Rightarrow F_B = 9.9 \cdot F_{in}$

$F_{in} = 0.2$ l/h

$V_R = 2.5$ l

$\Rightarrow F_R = 0.9 \cdot 9.9 F_{in} = 8.91 \cdot F_{in}$

$X_R = \frac{X}{0.9}$

MB. m.a.p X vid s.s. över hela systemet

a) $F_{in} \cdot 0 - F_A \cdot X + \mu \cdot X \cdot V = 0$

$$\left(\mu - \frac{F_A}{V}\right) X = 0$$

$$\mu = 0.01 \cdot \frac{F_{in}}{V} = 0.01 \cdot \frac{0.2}{2.5} = 0.0008 h^{-1}$$

b) Halten S vid s.s. fås ur Monodkinetiken

$$\mu = \frac{\mu_{max} \cdot S}{K_s + S} \Leftrightarrow \mu(K_s + S) = \mu_{max} \cdot S \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mu K_s + \mu \cdot S = \mu_{max} \cdot S \Leftrightarrow S = \frac{\mu \cdot K_S}{\mu_{max} - \mu}$$

$$S = \frac{0.0008 \cdot 0.15}{0.2 - 0.0008} = 0.0006 \text{ g/l} = 0.6 \text{ mg/l}$$

2 b (forts) M.B. m.a.p. X över reaktorn

$$F_{in} \cdot 0 + F_R \cdot \frac{X}{0.9} - F_a \cdot X + \mu \cdot V_R \cdot X = 0$$

$$\left(\frac{F_R}{0.9} - F_A + \mu \cdot V\right) \cdot X = 0$$

$\Rightarrow$ ger ej lösning för X

$$X = Y_{X/S} \cdot (S_{in} - S) = 0.15 \cdot (100 - 0.0006) \approx 15.0 \text{ g/l}$$

2c) $\mu = \alpha \cdot \frac{F_{in}}{V}$ $\alpha = \frac{F_a}{F_{in}}$

$\mu = 0.05 \cdot \frac{F_{in}}{V} = 0{,}004 \text{ h}^{-1}$ dvs proportionellt mot avtappningsflödet

2d) $\mu = D = \frac{F_{in}}{V_R} = 0.08 \text{ h}^{-1}$

$$S = \frac{\mu K_s}{\mu_{max} - \mu} = 0.1 \text{ g/l}$$

$$X = 0.15(100 - 0.1) = 14.98 \text{ g/l} \approx$$

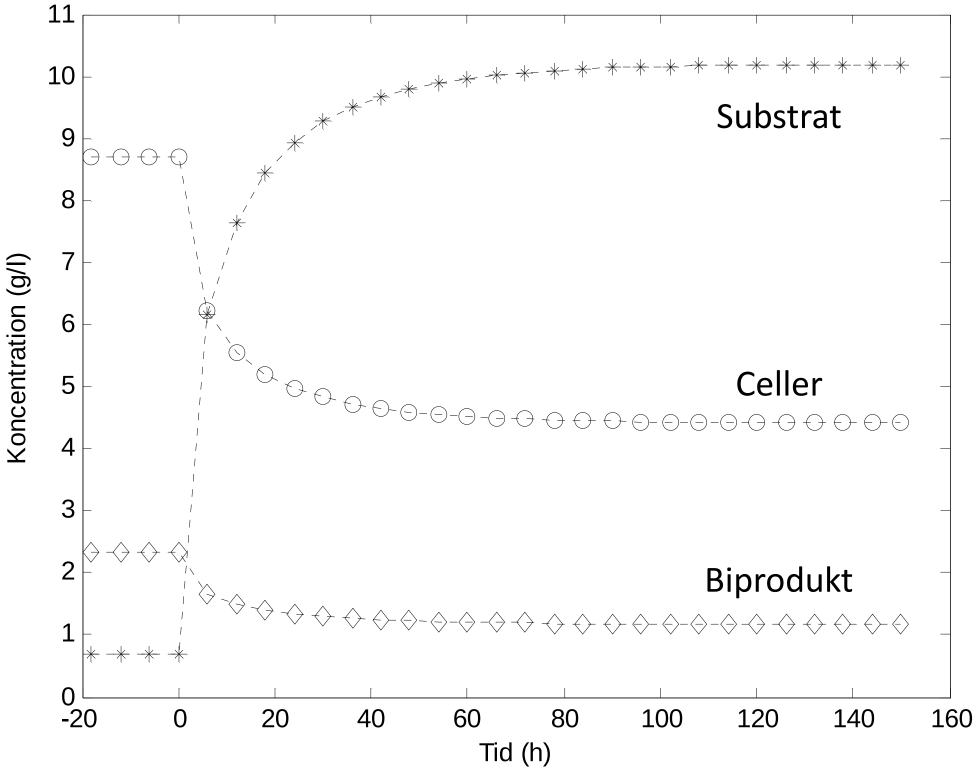
e) Filtreringshastigheten! Blockering av filtret.

f) Vid mycket låga μ går en större andel av substrat-förbrukningen till maintenance $\Rightarrow Y_{X/S}$ blir lågt.

Uppgift 3 (12 poäng)

Bioprocessuppgift, kontinuerlig odling, tolka graf, kvantitativ analys, stegändring

Bilden nedan visar resultat från koncentrationsmätningar i en kontinuerlig odling i en omrörd bioreaktor (CSTR) med volymen 1 l. Vid tiden 0 h, ändras utspädningshastigheten D från 0.10 h^{-1} till 0.30 h^{-1}. Halten substrat i inflödet till bioreaktorn är 20 g/l. Cellerna kan antas växa enligt Monodkinetik.



a) Beräkna ytbyteskoefficienter för celler ($Y_{X/S}$) och biprodukt ($Y_{P/S}$) på förbrukat substrat, i g/g. Biomassans askhalt är försumbart låg.

b) Bestäm parametervärdena μ_{max} och K_S i Monodkinetiken

c) Föreslå ett eller flera försök och utvärderingsmetoder som skulle kunna ge säkrare uppskattning av parametervärdena

Lösningsförslag Uppg 3:

a) $Y_{X/S}$ = 8.8 / (20 – 0.7) g/g = 0.46 g/g; $Y_{X/S}$ = 4.5 / (20 – 10.2) g/g = 0.46 g/g;
$Y_{P/S}$ = 2.3 / (20 – 0.7) = 0.12 g/g; $Y_{P/S}$ = 1.2 / (20 – 0.7) = 0.12 g/g.

b) Bestäm parametervärdena μ_{max} och K_S i Monodkinetiken

μ = D (h^{-1})	S (g/l)	1/D	1/S
0.10	0.7	10	1.43
0.30	10.2	3.33	0.098

K_S / μ_{max} = (10-3.33) / (1.43-0.098) = 5.01

1/ μ_{max} = 3.33 – 5.01*0.098 = 2.84

μ_{max} = 1 / 2.84 = 0.35 h^{-1}

Ks = 5.01 * 0.35 = 1.8 g/l

c) Föreslå ett eller flera försök och utvärderingsmetoder som skulle kunna ge säkrare uppskattning av parametervärdena

1. Upprepa försöken. 2. Mät halterna vid fler steady state och använd linjär regression. 3. Mät halterna vid fler steady state och använd *icke-linjär* regression, dvs använd Matlabs icke-linjära minimeringsrutin för att minimera kvadratsumman av skillnaden mellan uppmätta substrathalter eller utspädningshastigheter och de som beräknas via Monodkinetiken. 4. Vikta försöksresultaten med variansen vid varje försökspunkt (kräver upprepade försök!). 5. Bestäm μ_{max} i upprepade batchodlingar istället.

Uppgift 4 (10 poäng)

Ideal tubreaktor

Inflödeshastigheten till en isobar ideal tubreaktor är 20,0 m^3 gas/h, bestående av 1/2 acetylen och 1/2 inert gas vid 555 ^oC och 20 bar. Vid denna temperatur polymeriseras acetylen enligt:

$$4C_2H_2 \rightarrow (C_2H_2)_4$$
$$(A) \qquad (A_4)$$

Reaktionen är ett andra ordningens förlopp med

R= k * C_A^2 och k= 6,1 * m^3 $kmol^{-1}$ s^{-1}

Vilken reaktorvolym krävs för att åstadkomma 98% omsättning med avseende på acetylen?

④ 8.1 Uppg. 4

F_{in} $\quad F_A \quad F_A + dF_A$

C_A^0

$Q_{in} = 20\, m^3/h$

$r = k \cdot c_A^2 \qquad k = 6.1\ m^3/kmol\,s \;\hat{=}\; 6.1 \cdot 10^{-3}\ m^3/mol\,s$

Vid steady state

$$F_A - (F_A + dF_A) - r_A\, dV_r = 0 \qquad -dF_A = r_A\, dV_r$$

$$\frac{dF_A}{dV_r} = -r_A \qquad dF_A = -F_{Af}\, dx_A$$

$$F_{Af}\frac{dx_A}{dV} = r_A \iff F_{Af}\frac{dx_A}{r_A} = dV$$

$$r_A = k \cdot c_A^2$$

$$c_A = \frac{F_A}{F_{tot}}\cdot\frac{P}{RT} = \frac{F_{Af}(1-x_A)}{\underbrace{F_{Af}}_{\text{inert}} + \underbrace{F_{Af}(1-x_A)}_{A} + \underbrace{\tfrac{1}{4}F_{Af}x_A}_{A_4}} = \frac{1-x}{1+1-x_A+\frac{1}{4}x_A} =$$

$$= \frac{1-x}{2-0.75x_A}\cdot\frac{P}{RT}$$

$$\int_0^{X_A}\frac{(2-0.75x_A)^2}{(1-x_A)^2}\,dx_A = \frac{P^2 \cdot k}{R^2T^2F_{Af}}\int_0^{V_r} dV_r = \frac{P^2\cdot k\cdot V_r}{R^2T^2F_{Af}}$$

~~$V.L. = \int_0^{X_A} \frac{dx}{\ldots} \ldots x_A$~~

~~$-0.75\left[\frac{x}{-1} - \frac{1}{(-1)^2}\ln(1-x)\right]^{X_A} = 2(-\ln(1-x_A) + \ln(1)) -$~~

~~$-0.75\left(-x_A - \ln(1-x_A)\right) + \ldots = \ldots \ln(1-x_A) \ldots x_A =$~~

(4) s.2 Integraler nr. 28, 31 och 33 borde kunna användas.

$$\frac{(2-0.75x)^2}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}\cdot(2-0.75x)(2-0.75x) =$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}\cdot\left(4-2\cdot2\cdot0.75x+0.75^2x^2\right) =$$

$$= \frac{4}{(1-x)^2} - \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{0.5625\cdot x^2}{(1-x)^2}$$

$$\int_0^{X_A}\frac{(2-0.75x)^2}{(1-x)^2}\,dx = 4\cdot\int_0^{X_A}\frac{1}{(1-x)^2} - 3\int_0^{X_A}\frac{x}{(1-x)^2}\,dx + 0.5625\int_0^{X_A}\frac{x^2}{(1-x)^2}\,dx =$$

$$= 4\cdot\left[\cancel{-}\frac{1}{\cancel{(-1)}(1-x)}\right]_0^{X_A} - 3\left[\frac{1}{\cancel{(-1)^2}}\left(\ln(1-x)+\frac{1}{1-x}\right)\right]_0^{X_A} +$$

$$+ 0.5625\left[\frac{1}{(-1)^3}\left((1-x)-2\ln(1-x)-\frac{1^2}{1-x}\right)\right]_0^{X_A} =$$

$$= \left[\frac{4}{1-x} - 3\ln(1-x) + \frac{3}{1-x} - 0.5625(1-x) - \right.$$

$$\left. -2\cdot0.5625\ln(1-x) - \frac{0.5625}{1-x}\right]_0^{X_A} =$$

$$= \left[\frac{6.4325}{1-x} - 4.125\ln(1-x) - 0.5625(1-x)\right]_0^{X_A} =$$

$$\left(\frac{6.4325}{0.02} - 4{,}125\cdot\ln(0{,}02) - 0.5625\cdot0.02\right) - \left(6.4325 - 4.125\cdot\ln 1 - \right.$$

$$\left. - 0.5625\right) = 331.9$$

4 s. 3

$$V_R = \frac{R^2 T^2 \cdot F_{Af}}{P^2 k} \cdot \int_0^{x_A} f(x)\,dx =$$

$$= \frac{R T Q_A}{P \cdot k} \cdot 331.9 = \left\{ Q_A = \frac{20}{2}\ m^3/h = \frac{10}{3600}\left[\frac{m^3}{s}\right] \right\}$$

$$= \frac{8.3144 \cdot (273.15 + 555) \cdot 10}{20 \cdot 10^5 \cdot 3600 \cdot 6.1 \cdot 10^{-3}} \cdot 331.9 =$$

$$= 0.52\ m^3$$

Volymen ska vara 0.52 m^3

Uppgift 5 (12 poäng)

Uppehållstidsfördelning, sterilisering?

Till en kontinuerlig omrörd bioreaktor ska tillföras 1 m^3 medium per timme. Mediet steriliseras först i en kontinuerlig tubreaktor, där det snabbt kan hettas upp till max 125°C. För att undvika oönskade reaktioner vill man dock hålla temperaturen så låg som möjligt.

a) För avdödning av mikroorganismer i det aktuella mediet har följande experimentella satsvisa data uppmätts. Det visar sig att avdödningen kan anses vara ett första ordningens förlopp.

Bestäm aktiveringsenergin för hastighetskonstanten för avdödning (k_d) av mikroorganismer ur följande satsvisa steriliseringsförsök.

Tid (s)	Temperatur ºC	N antal/ m^3
0	100	$1.0 \cdot 10^8$
120	100	$4.7 \cdot 10^6$
0	120	$1.0 \cdot 10^8$
150	120	$3.1 \cdot 10^3$

Lösning Uppg 5a:

N/N_0 = e^(- k_d ·t) och k_d = k_{d0} · e^(- E_A/RT)

k_d = -ln(N/N_0) / t

k_{d1} / k_{d2} = (k_{d0} / k_{d0}) · e^(- E_A/R·[1/T_1-1/T_2])

E_A = -R / [1/T_1-1/T_2] · ln(k_{d1} / k_{d2}) = - 8.314 / [1/373.15-1/393.15] · ln(0.0255 / 0.0692)

Svar: E_A = 60.94 kJ/molK

b) Tubreaktorn har volymen 60 liter. För att ta reda på uppehållstidsfördelningen i reaktorn genomfördes ett spårämnesförsök, vars resultat sammanfattas i tabellen nedan.

Tid (min)	**Konc hos spårämne**
0	0
1	0
2	5
3	30
4	25
5	4
6	0

Beräkna vilken steriliseringstemperatur som garanterar att halten kontaminerande celler i inflödet till bioreaktorn blir maximalt 1 cell per liter medium, dvs $<10^3$ celler / m^3. Ange temperaturen i hela grader. Mediet kan anses bete sig som ett segregerat flöde. Precis som i de satsvisa försöken är antalet celler i det osteriliserade mediet $1 \cdot 10^8$ celler / m^3.

Lösning Uppg 5b:

Den temperatur söks, som ger att <c> blir max 10^3 celler per m^3.
Kd0= 8648729 s^{-1} och Ea= 60939 J/molK fås från Arrhenius-uttrycket och tidigare givna data

$$k_d(T) = K_{d0} \cdot e\text{^}(-E_A/RT)$$

T	$K_d(T)$ (s^{-1})
120	6.92E-02
121	7.26E-02
122	7.61E-02
123	7.97E-02
124	8.35E-02
125	8.75E-02

$$\langle c_j \rangle = \int_0^{\infty} c_j(t)\, E(t)\, dt$$

$$E(t) = \frac{c_s}{\int_0^{\infty} c_s} \quad dt$$

$$\langle t \rangle = \int_0^{\infty} t\, E(t)\, dt$$

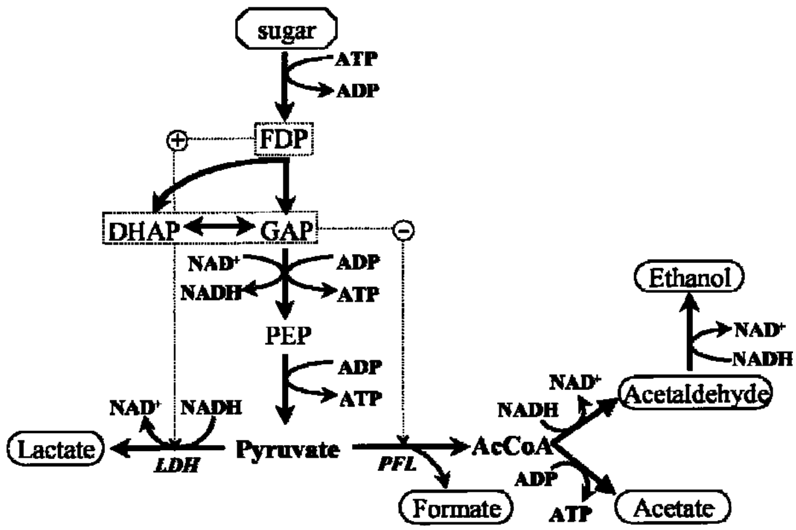
Tid (min)	Konc av spårämne	E(t)	t*E(t)	c(t)*E(t) T=120	c(t)*E(t) T=121	c(t)*E(t) T=122	c(t)*E(t) T=123
0	0	0	0	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
1	0	0	0	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
2	4	0.059	0.118	1.45E+03	9.73E+02	6.39E+02	4.13E+02
3	29	0.426	1.279	1.66E+02	9.07E+01	4.83E+01	2.51E+01
4	27	0.397	1.588	2.43E+00	1.09E+00	4.69E-01	1.95E-01
5	6	0.088	0.441	8.48E-03	3.10E-03	1.09E-03	3.64E-04
6	2	0.029	0.176	4.44E-05	1.33E-05	3.78E-06	1.02E-06
7	0	0	0	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
			3.603	1.62E+03	**1.06E+03**	**6.88E+02**	4.38E+02
cs tot=	68		**<t> (min)**	<c> (/m^3)	**<c> (/m^3)**	**<c> (/m^3)**	<c> (/m^3)

Svar: Temperaturen behöver vara knappt 122 °C

Uppgift 6 (10 poäng)

Kol- och reduceringsgradsbalans

Lactococcus lactis odlades i en anaerob kemostat med 10 g/l glukos i inflödet och med NH_3 som kvävekälla. Vid utspädningshastigheten D=0.095 h^{-1} uppvisade *L. lactis* s.k. mixed acid fermentation (se figur).



Följande halter uppmättes vid steady state:

Mjölksyra ($C_3H_6O_3$): 19 mM

Myrsyra (CH_2O_2): 59 mM

Ättiksyra ($C_2H_4O_2$): 41 mM

Etanol (C_2H_6O): 40 mM

Glukos ($C_6H_{12}O_6$): <0.05 g/l, under detektionsgränsen.

Askfri biomassa ($CH_{1.82}O_{0.55}N_{0.2}$): 0.81 g/l

a) Man misstänker att det blivit ett fel i kvantifieringen av produkterna pga ett fel i en av standarderna. Kontrollera kol- och reduceringsgradsbalanserna och korrigera halterna så att båda balanserna uppfylls till minst 99%.

b) Beräkna de specifika produktionshastigheterna av de fyra produkterna, i mmol/gh

c) Förklara hur de observerade halterna och utbytena beror av varandra med hjälp av bilden ovan.

Lösning Uppg 6:

a) Reduktionsgraden: γ_i ($CH_aO_bN_c$) = 4 + a -2·b - 3·c om kvävekällan är ammoniak.

$Y_{i/j} = c_i / c_j$ där koncentrationerna c_i och c_j anges i C-mol

Kolbalans $\Sigma_i Y_{i/j}$

Reduktionsgradsbalans $\Sigma_i Y_{i/j} \cdot \gamma_i$
k för saknad produkt = $\Sigma_i Y_{i/j} \cdot \gamma_i / \Sigma_i Y_{i/j}$

k=2.05 visar att den saknade produkten antagligen är myrsyra. Genom att höja utbytet för myrsyra motsvarande det saknade kolet uppfylls båda balanserna inom 99%.

D= 0.095 h^{-1}

	halt mM	Utbyte Y (cmol/cmol)	Reducerings-grad γ_i	Y* γ_i	Korrekt halt mM	rp (mmol/gh)
X	0.81	0.096	4.12	0.394	0.81	
G	<0.05	-1	4	-4.000		
Lac	19	0.171	4	0.684	19	2.2
Form	59	0.177	2	0.354	80	9.4
Ac	41	0.246	4	0.984	41	4.8
EtOH	40	0.240	6	1.440	40	4.7
	Summa Y	-0.07041	Summa γ_i	-0.14415		
			% av – 4	-0.964		
	γ_i för saknad produkt	2.05				

b) $r_i = (c_{i,ut} - c_{i,\ in}) / (D \cdot c_x)$

Om c_i anges i mM och c_x i g/l blir svaret i mmol/g/h

Formelsamling: Bioreaktionsteknik KKR090

Reaktionsomsättning

$n_j = n^{\circ}_j + \Sigma\, \nu_{ij}\, \xi_i$, i = 1,2, ……………R

$F_j = F_j^{\circ} + \Sigma\, \nu_{ij} R_i$ $$R_i = \frac{d\,\xi_i}{dt}$$

Omsättningsgrad

$F_j = F_j^{\circ}\,(1\text{-}x_j)$, $x_j > 0$ *då* $\nu_j < 0$

Reaktionsentalpi

$\Delta H = \Sigma\;\nu_j\; h_j = \Sigma\;\nu_j\,(\Delta H_f^{\circ})_j$

Medelmolvärme

$$< c_p > = \left[1/(T_2 - T_1)\right] \int_{T_1}^{T_2} c_p\; dT$$

Reduceringsgrad $\boldsymbol{\gamma_i = 4 + a_i - 2b_i - (c_i/c_4)*(4d_4 + a_4 - 2b_4)}$

Uppehållstidfördelning

$$< t > = \int_0^1 t\,dF(t) \quad , \quad < t > = \int_0^{\infty} t\; E(t)\; dt \quad \text{och} \quad \sigma_t^2 = \int_0^{\infty} (t - < t >)^2 \;\; E(t)\;\; dt$$

Pulsmetoden $$E(t) = \frac{c_s}{\int_0^{\infty} c_s\,dt}$$ **Stegmetoden** $$F(t) = \frac{c_s - c_{s0}}{c_{s1} - c_{s0}}$$

Ideal tankreaktor

$E(t) = (1/\tau)\;\exp(-t/\tau)$

$F(t) = 1 - \exp(-t/\tau)$

Linjär process eller segregerat flöde

$$< c_j > = \int_0^{\infty} c_j(t)\, E(t)\, dt$$

Spårämnesförsök öppen mätsträcka

$<t>$ $= (L/\mathrm{v})\;[\,1 + 2(D_{ea}/\,\mathrm{v}L)\,]$ och $\sigma_t^2 / < t >^2 = 2(D_{ea} / \mathrm{v}L) + 8(D_{ea} / \mathrm{v}L)^2$

Spårämnesförsök sluten mätsträcka

$<t>$ $= L/\mathrm{v}$ och σ_t^2 **/$<t>^2$** $= 2(D_{ea} / \mathrm{v}L) - 2(D_{ea} / \mathrm{v}L)^2\;[\,1\text{-}\exp(-\,\mathrm{v}L/\,D_{ea}\,)]$

Jämförelse av ideal och reell reaktor för första ordningens förlopp

Vid given omsättningsgrad:

$$(V_{reell} / V_{ideal}) = 1 + k_1\,\tau_{reell}\,\frac{D_{ea}}{v\,L_{reell}}$$ (tom tub)

Vid lika reaktorvolym:

$(1 - x)_{reell} / (1 - x)_{ideal} = 1 + (k_1\,\tau)^2\,(D_{ea} / \mathrm{v}L)$ (tom tub)

Tankseriemodellen $<t> = \tau$, $N = \tau^2 / \sigma_t^2$

INTEGRALS

ELEMENTARY FORMS

1. $\int a\,dx = ax$

2. $\int a \cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$

3. $\int \phi(y)\,dx = \int \frac{\phi(y)}{y'}\,dy, \qquad \text{where } y' = \frac{dy}{dx}$

4. $\int (u + v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx, \qquad$ where u and v are any functions of x

5. $\int u\,dv = u\int dv - \int v\,du = uv - \int v\,du$

6. $\int u\frac{dv}{dx}dx = uv - \int v\frac{du}{dx}dx$

7. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad \text{except } n = -1$

8. $\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} = \log f(x), \qquad (df(x) = f'(x)\,dx)$

9. $\int \frac{dx}{x} = \log x$

10. $\int \frac{f'(x)\,dx}{2\sqrt{f(x)}} = \sqrt{f(x)}, \qquad (df(x) = f'(x)\,dx)$

11. $\int e^x\,dx = e^x$

12. $\int e^{ax}\,dx = e^{ax}/a$

13. $\int b^{ax}\,dx = \frac{b^{ax}}{a\log b}, \qquad (b > 0)$

14. $\int \log x\,dx = x\log x - x$

15. $\int a^x \log a\,dx = a^x, \qquad (a > 0)$

16. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$

INTEGRALS (Continued)

17. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a} \\ \text{or} \\ \frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x}, \qquad (a^2 > x^2) \end{cases}$

18. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \begin{cases} -\frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{x}{a} \\ \text{or} \\ \frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}, \qquad (x^2 > a^2) \end{cases}$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \sin^{-1}\frac{x}{|a|} \\ \text{or} \\ -\cos^{-1}\frac{x}{|a|}, \qquad (a^2 > x^2) \end{cases}$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \log(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$

21. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{|a|}\sec^{-1}\frac{x}{a}$

22. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 \pm x^2}} = -\frac{1}{a}\log\left(\frac{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}\right)$

FORMS CONTAINING $(a + bx)$

For forms containing $a + bx$, but not listed in the table, the substitution $u = \frac{a + bx}{x}$ may prove helpful.

23. $\int (a + bx)^n\,dx = \frac{(a + bx)^{n+1}}{(n+1)b}, \qquad (n \neq -1)$

24. $\int x(a + bx)^n\,dx$

$$= \frac{1}{b^2(n+2)}(a + bx)^{n+2} - \frac{a}{b^2(n+1)}(a + bx)^{n+1}, \qquad (n \neq -1, -2)$$

25. $\int x^2(a + bx)^n\,dx = \frac{1}{b^3}\left[\frac{(a + bx)^{n+3}}{n+3} - 2a\frac{(a + bx)^{n+2}}{n+2} + a^2\frac{(a + bx)^{n+1}}{n+1}\right]$

INTEGRALS (Continued)

26. $$\int x^m(a+bx)^n\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{m+1}(a+bx)^n}{m+n+1} + \dfrac{an}{m+n+1}\displaystyle\int x^m(a+bx)^{n-1}\,dx \\ \text{or} \\ \dfrac{1}{a(n+1)}\Big[-x^{m+1}(a+bx)^{n+1} \\ \qquad + (m+n+2)\displaystyle\int x^m(a+bx)^{n+1}\,dx\Big] \\ \text{or} \\ \dfrac{1}{b(m+n+1)}\Big[x^m(a+bx)^{n+1} - ma\displaystyle\int x^{m-1}(a+bx)^n\,dx\Big] \end{cases}$$

27. $$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\log(a+bx)$$

28. $$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}$$

29. $$\int \frac{dx}{(a+bx)^3} = -\frac{1}{2b(a+bx)^2}$$

30. $$\int \frac{x\,dx}{a+bx} = \begin{cases} \dfrac{1}{b^2}[a+bx-a\log(a+bx)] \\ \text{or} \\ \dfrac{x}{b} - \dfrac{a}{b^2}\log(a+bx) \end{cases}$$

31. $$\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2}\left[\log(a+bx) + \frac{a}{a+bx}\right]$$

32. $$\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^n} = \frac{1}{b^2}\left[\frac{-1}{(n-2)(a+bx)^{n-2}} + \frac{a}{(n-1)(a+bx)^{n-1}}\right], \qquad n \neq 1, 2$$

33. $$\int \frac{x^2\,dx}{a+bx} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2\log(a+bx)\right]$$

34. $$\int \frac{x^2\,dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^3}\left[a+bx-2a\log(a+bx) - \frac{a^2}{a+bx}\right]$$

35. $$\int \frac{x^2\,dx}{(a+bx)^3} = \frac{1}{b^3}\left[\log(a+bx) + \frac{2a}{a+bx} - \frac{a^2}{2(a+bx)^2}\right]$$

36. $$\int \frac{x^2\,dx}{(a+bx)^n} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{-1}{(n-3)(a+bx)^{n-3}} + \frac{2a}{(n-2)(a+bx)^{n-2}} - \frac{a^2}{(n-1)(a+bx)^{n-1}}\right], \qquad n \neq 1, 2, 3$$

INTEGRALS (Continued)

37. $$\int \frac{dx}{x(a+bx)} = -\frac{1}{a}\log\frac{a+bx}{x}$$

38. $$\int \frac{dx}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{a(a+bx)} - \frac{1}{a^2}\log\frac{a+bx}{x}$$

39. $$\int \frac{dx}{x(a+bx)^3} = \frac{1}{a^3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2a+bx}{a+bx}\right)^2 + \log\frac{x}{a+bx}\right]$$

40. $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2}\log\frac{a+bx}{x}$$

41. $$\int \frac{dx}{x^3(a+bx)} = \frac{2bx-a}{2a^2x^2} + \frac{b^2}{a^3}\log\frac{x}{a+bx}$$

42. $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx)^2} = -\frac{a+2bx}{a^2x(a+bx)} + \frac{2b}{a^3}\log\frac{a+bx}{x}$$

FORMS CONTAINING $c^2 \pm x^2$, $x^2 - c^2$

43. $$\int \frac{dx}{c^2+x^2} = \frac{1}{c}\tan^{-1}\frac{x}{c}$$

44. $$\int \frac{dx}{c^2-x^2} = \frac{1}{2c}\log\frac{c+x}{c-x}, \qquad (c^2 > x^2)$$

45. $$\int \frac{dx}{x^2-c^2} = \frac{1}{2c}\log\frac{x-c}{x+c}, \qquad (x^2 > c^2)$$

46. $$\int \frac{x\,dx}{c^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\log(c^2 \pm x^2)$$

47. $$\int \frac{x\,dx}{(c^2 \pm x^2)^{n+1}} = \mp\frac{1}{2n(c^2 \pm x^2)^n}$$

48. $$\int \frac{dx}{(c^2 \pm x^2)^n} = \frac{1}{2c^2(n-1)}\left[\frac{x}{(c^2 \pm x^2)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{dx}{(c^2 \pm x^2)^{n-1}}\right]$$

49. $$\int \frac{dx}{(x^2 - c^2)^n} = \frac{1}{2c^2(n-1)}\left[-\frac{x}{(x^2 - c^2)^{n-1}} - (2n-3)\int \frac{dx}{(x^2 - c^2)^{n-1}}\right]$$

50. $$\int \frac{x\,dx}{x^2-c^2} = \frac{1}{2}\log(x^2-c^2)$$

51. $$\int \frac{x\,dx}{(x^2-c^2)^{n+1}} = -\frac{1}{2n(x^2-c^2)^n}$$