MATEMATIK	Datum: 2007-10-24	Tid: förmiddag
Chalmers	Hjälpmedel: inga	
A.Heintz	Telefonvakt: Jonas Hartwig	Tel.: 0762-721860

Lösningar till tentan i TMV035 Analys och linjär algebra K/Bt/Kf, del A.

1. **Sats** Ange och bevisa formeln för derivatan av produkt av två funktioner. (4p)

   Formeln: $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

   gäller om funktionerna f och g är deriverbara i punkten x.

   Bevis:

   $(f \cdot g)'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x+h)+f(x)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}\right) =$

   $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x+h)}{h}\right) + \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}\right) =$

   $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)\lim_{h\to 0}(g(x+h)) + f(x)\lim_{h\to 0}\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right).$

   Funktionen g är kontinuerlig i punkten x eftersom den är deriverbar i den punkten, så

   $\lim_{h\to 0}(g(x+h)) = g(x).$

   $\lim_{h\to 0}\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) = g'(x)$, och $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) = f'(x)$. Så

   $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}\right) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$. Beviset är klart.

2. **Gränsvärde.** Beräkna gränsvärdet:

   $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$, där $a > b$. (4p)

   Elementär lösning. Multiplicera täljaren och nämnaren med $\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}$

   $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2} = \lim_{x\to a} \frac{\left(\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}\right)\left(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}\right)}{(x^2-a^2)\left(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}\right)} =$

   $\lim_{x\to a} \frac{(x-b-(a-b))}{(x-a)(x+a)\left(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}\right)} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)}{(x-a)(x+a)\left(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}\right)} =$

   $\lim_{x\to a} \frac{1}{(x+a)\left(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}\right)} = \frac{1}{4a\sqrt{a-b}}.$

   Lösning med Taylorsutveckling. Man kan lösa samma problem med att Taylorutveckla täljaren och nämnaren rund punkten $x = a$.

   Allmän formel är: $f(a) + f'(a)(x-a) + O((x-a)^2)$, då $x \to a$.

   $\sqrt{x-b} - \sqrt{a-b} = \frac{1}{2\sqrt{a-b}}(x-a) + O\left((x-a)^2\right);$

   $x^2 - a^2 = 2a(x-a) + O\left((x-a)^2\right)$

   $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2} = \lim_{x\to a}\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{a-b}}(x-a)+O\left((x-a)^2\right)}{2a(x-a)+O\left((x-a)^2\right)}\right) = \lim_{x\to a}\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{a-b}}+O((x-a))}{2a+O((x-a))}\right) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{a-b}}}{2a} =$

   $\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}.$

3. **Kontinuitet.** 1) Ange vilket samband finns mellan gränsvärdet till en funktion i en punkt och vänster och höger gränsvärden av den funktionen i samma punkt.

   2) Betrakta funktionen f definierad på intervallet $[-3, 5]$ på följande sätt:

   $f(x) = 0$, för $-3 \le x < 0$,

   $f(x) = x$, för $0 \le x < 1$,

$f(x) = (-x^2 + 4x - 2)$, för $1 \le x < 3$,

$f(x) = (4.5 - x)$, för $3 \le x \le 5$.

Ange alla x där funktionen f är kontinuerlig och motivera varför.

Tips: gör en skiss med grafen till f. (4p)

Funktionen är kontinuerlig i intervallet $-3 \le x < 3$, och i intervallet $3 < x \le 5$. Det finns tre "misstänkta" punkter i definitionsområdet:

$x = 0$, $x = 1$, $x = 3$ där funktionen är definierad med olika formler på vänster och högersidan av punkten. Men i punkterna $x = 0$, och $x = 1$ höger och vänstergränsvärden är likadana och lika med värden av funktionen i dessa punkter. I punkten $x = 3$ är vänstergränsvärdet $\lim_{x\to 3-} f(x) = 1$, och högergränsvärdet $\lim_{x\to 3+} f(x) = 1.5$. Det gör att gränsvärdet $\lim_{x\to 3} f(x)$ saknas och funktionen f är icke-kontinuerlig i punkten $x = 3$.

4. **Derivering.** Beräkna derivatan till funktionen

$$f(x) = \ln\left(\frac{x + \sqrt{1-x^2}}{x}\right).$$

Lösning: $\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)\right) = \frac{x}{x+\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{1}{x}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) + \frac{1}{x^2}\left(-x - \sqrt{1-x^2}\right)\right) =$

$\frac{-1}{x}\left(\frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\right)\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\left(\frac{1}{x\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{1-x^2}}\right)$ (4p)

5. **Extrempunkter.** Bestäm alla lokala extrempunkter och absolut maximum och absolut minimum (om de existerar) till följande funktion:

$g(x) = x^3 - 2ax^2 + a^2x$,

definierad på intervallet $[\,-2a,\ 2a\,]$, för $a > 0$. Motivera svaret! (4p)

max (4/27)a^3 i x=a/3; min =0 i x=a

Funktionen är deriverbar på hela intervallet $[\,-2a,\ 2a\,]$. Så lokala och absoluta minima kan vara stationära punkter eller endpunkterna på intervallet $[-2a,\ 2a]$. Stationära punkter är rötter av ekvationen $g'(x) = 0$.

$g'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 2ax^2 + a^2x) = a^2 - 4ax + 3x^2 = 0$. Stationära punkter $x_1 = a$, $x_2 = \frac{1}{3}a$. Vi kan använda kriteriet med andra derivatan.

$g''(x) = \frac{d}{dx}(a^2 - 4ax + 3x^2) = 6x - 4a$. Vi beräknar värdena av andra derivatan $g''(x)$ i stationära punkterna x_1, x_2: $g''(x_1) = 2a > 0$, $g''(x_2) = -2a < 0$.

Detta medför att funktionen g har ett lokalt minimum: $g(x_1) = x^3 - 2ax^2 + a^2x|_{x=a} = a^3 - 2a^3 + a^3 = 0$ i punkten $x_1 = a$.

I punkten $x_2 = \frac{1}{3}a$ har funktionen g ett lokalt maximum: $g(x_2) = x^3 - 2ax^2 + a^2x|_{x=a/3} = \frac{a^3}{27} - 2\frac{a^3}{9} + \frac{a^3}{3} = \frac{4}{27}a^3$. Värdena av g i endpunkterna är:

$g(-2a) = (x^3 - 2ax^2 + a^2x)\,|_{x=-2a} = (-8a^3 - 8a^3 - 2a^3) = -18a^3$,

Första derivatan i den punkten $g'(-2a) = 24a^2 > 0$ - så g har ett lokalt minimum i den endpunkten.

$g(+2a) = (x^3 - 2ax^2 + a^2x)\,|_{x=+2a} = (+8a^3 - 8a^3 + 2a^3) = 2a^3$

Första derivatan i den punkten $g'(2a) = 5a^2 > 0$ - så g har ett lokalt maximum i den endpunkten.

Vi jämför alla lokala extremvärden och får att funktionen g har absolut minimum $-18a^3$ i punkten $x = -2a$ och absolut maximum $2a^3$ i punkten $x = 2a$.

Funktionen g har ett lokalt minimum 0 i punkten $x_1 = a$ och ett lokalt maximum $\frac{4}{27}a^3$ i punkten $x_2 = \frac{1}{3}a$.

6. **Taylors polynom.** Ange Taylors polynom av ordning 3 rund punkten $a = 1$ för funktionen:

   $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ med feltermen på allmän form.

   Allmän form på Taylorsutveckling av ordning 3 är:

   $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{2\cdot 3}f'''(a)(x-a)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(s)(x-a)^4$,

   där s är en punkt mellan punkterna a och x.

   Vi börjar med att beräkna derivator av f till och med ordning 4.

   $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}\Big|_{x=1} = -\frac{1}{2}$; $\qquad \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{3}{4x^{\frac{5}{2}}}\Big|_{x=1} = \frac{3}{4}$;

   $\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\frac{15}{8x^{\frac{7}{2}}}\Big|_{x=1} = -\frac{15}{8}$; $\qquad \frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{105}{16x^{\frac{9}{2}}}$;

   I fall med funktionen $\frac{1}{\sqrt{x}}$ och punkten $a = 1$ insättningen av konkreta värden för derivator i allmänna formeln ger utvecklingen:

   $$\frac{1}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{2}(x-1)^1 + \frac{3}{8}(x-1)^2 - \frac{5}{16}(x-1)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{105}{16\, s^{\frac{9}{2}}}\right)(x-1)^4 \qquad (4p)$$

7. **Plan i rummet.** Bestäm minimalt avstånd mellan planet med ekvationen

   $4x - 3y + 5z - 10 = 0$, och origo. (4p)

   Minimalt avstånd mellan en punkt och ett plan beräknas lätt från planets ekvation i normal form: $n_x x + n_y y + n_z z + d = 0$ där normalvektorn med komponenterna n_x, n_y, n_z har längden 1 : $\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1$. Avståndet mellan en punkt med koordinater x_0, y_0, z_0 och planet fås med insättning av punkters koordinater i planets ekvation: $distans = |n_x x_0 + n_y y_0 + n_z z_0 + d|$.

   Normaliserade ekvationen till givna planet får man med att dela ekvationen med längden av normalen i den givna ekvationen: $\sqrt{4^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

   $\frac{4}{5\sqrt{2}}x - \frac{3}{5\sqrt{2}}y + \frac{5}{5\sqrt{2}}z - \frac{10}{5\sqrt{2}} = 0$. Avståndet mellan origo (punkten med koordinater $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$) och planet är $\frac{10}{5\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

8. **Linje i rummet.** Ange parametrisk ekvation på vektorform för linjen genom punkten $P(1,2,4)$ som är vinkelrät mot det planet som skär sträckor -2, 1, 3 av

   x, y, z - koordinataxlarna. (4p)

   Allmän ekvation för linjen genom en punkt med riktningsvektorn $\overrightarrow{r_0}$ och så att linjen är parallell med riktningsvektorn $\overrightarrow{v}$ är följande: $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + t\ \overrightarrow{v}$, där $-\infty < t < \infty$ är en parameter.

   Punkten $\overrightarrow{r_0}$ är given: $\overrightarrow{r_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$. Riktningsvektorn $\overrightarrow{v}$ får väljas som normalvektorn till givna planet.

   Planet son skär sträckor -2, 1, 3 av x, y, z - koordinataxlarna har ekvationen $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{3} = 1$. Normalen till det planet har komponenter som är koefficienter vid x, y, z i ekvationen, d.v.s $\dfrac{1}{-2}, \dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{3}$.

Riktningsvektorn väljes som $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/3 \end{bmatrix}$.

Den sökta linjen har då parametrisk ekvation $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/3 \end{bmatrix}$, eller $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + t\ \overrightarrow{v}$, där $-\infty < t < \infty$.

Man kan också ta vektorn $\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ som riktningsvektorn $\overrightarrow{v}$.

Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättats, sen ta den som känns vara näst lättast o.s.v.

Maxpoäng: 32 ; **3:** 16; **4:** 22; **5:** 26