MATEMATIK
Chalmers
A.Heintz

Datum: 2008-10-24 Tid: förmiddag
Hjälpmedel: inga
Telefonvakt: Urban Larsson Tel.: 0762-721860

Lösningar till Tenta i TMV036/TMV035
Analys och linjär algebra K/Bt/Kf, del A.

1. **Sats** Formulera och bevisa Rolles sats (kolla i boken) (4p)

2. **Gränsvärde och kontinuitet.** 1) Ange definition för kontinuerlig funktion.

   2) Betrakta följande funktion:

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & \text{för } x \neq 0 \text{ och } -0.5 \leq x \leq 0.5 \\ \exp(1), & \text{för } x = 0 \end{cases}$$

   Bestäm om f är kontinuerlig i origo eller inte och motivera varför.(4p)

   Funktion f är kontinuerlig i punkten a om funktionen f är definierad på ett öppett intervall runt a, gränsvärdet $\lim_{x\to a} f(x)$ existerar och $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

   $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \exp(\ln(1+x)\frac{1}{x})$;

   $\lim_{x\to 0} \ln(1+x)\frac{1}{x} = 1$ (standard gränsvärde, fås lätt med Taylors utveckling). Detta medför att

   $\lim_{x\to 0} \exp(\ln(1+x)\frac{1}{x}) = \exp(1)$ och att f är kontinuerlig, eftersom $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

3. **Derivering.** Beräkna derivatan av funktionen

   $f(x) = \dfrac{e^x \cos(x)}{\sin(x^2)}$ (4p)

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{e^x \cos(x)}{\sin(x^2)}\right] = \left[(\cos x)\,\tfrac{e^x}{\sin(x^2)} - (\sin x)\,\tfrac{e^x}{\sin(x^2)} - 2x\,(\cos x)\,e^x \tfrac{\cos(x^2)}{\sin^2(x^2)}\right] =$$

$$\left(\sin\left(x^2\right)\right)^{-2}\left(\cos x \sin\left(x^2\right) - \sin x \sin\left(x^2\right) - 2x \cos x \cos\left(x^2\right)\right)\left(e^x\right).$$

4. **Tillämpning av derivator.** Betrakta funktionen :

$$g(x) = \begin{cases} (1-x)^3, & \text{för } 0 \leq x \leq 2 \\ 2(x+1)(x+0.5), & \text{för } -1.5 \leq x < 0 \end{cases} \quad 2(-3/4+1)(-3/4+0.5) : -0.125$$

   definierad på intervallet $[\ -1.5,\ 2\ ]$. Bestäm alla lokala extrempunkter, absolut maximum och absolut minimum (om de existerar). Bestäm böjningspunkter (inflection points), och de intervall där funktionen är konkav uppåt och konkav neråt. Rita en skiss av grafen till funktionen. (4p)

   Extrempunkter kan vara stationära punkter där $g'(x) = 0$, singulära punkter, där derivatan $g'(x)$ är odefinierad eller endpunkter. Vi beräknar derivatan av g :

$$g'(x) = \begin{cases} -3(1-x)^2, & \text{för } 0 < x \leq 2 \\ [4x+3]\,, & \text{för } -1.5 \leq x < 0 \end{cases}$$

   I punkten $x = 0$ vänster derivatan är 3 och höger derivatan är -3, så derivatan existerar inte i origo och $x = 0$ är en singulär punkt för g.

   Funktionen g har två stationära punkter: $x_1 = 1$ och $x_2 = -3/4$. Derivatan $g'(x) = -3(1-x)^2 < 0$ för punkterna x nära x_1. Det gör att x_1 är ingen extrempunkt.

Derivatan $g'(x) = [4x+3] > 0$ för punkterna x nära x_2 och $x_2 < x$ (funktionen vaxer). Derivatan $g'(x) = [4x+3] < 0$ för punkterna x nära x_2 och $x < x_2$ (funktionen avtagar). Detta medför enligt första derivatans kriteriet att x_2 är ett lokalt minimum: $g(x_2) = -0.125$. Det ser man också från andra derivatans kriteriet, eftersom $g''(-3/4) = 4 > 0$:

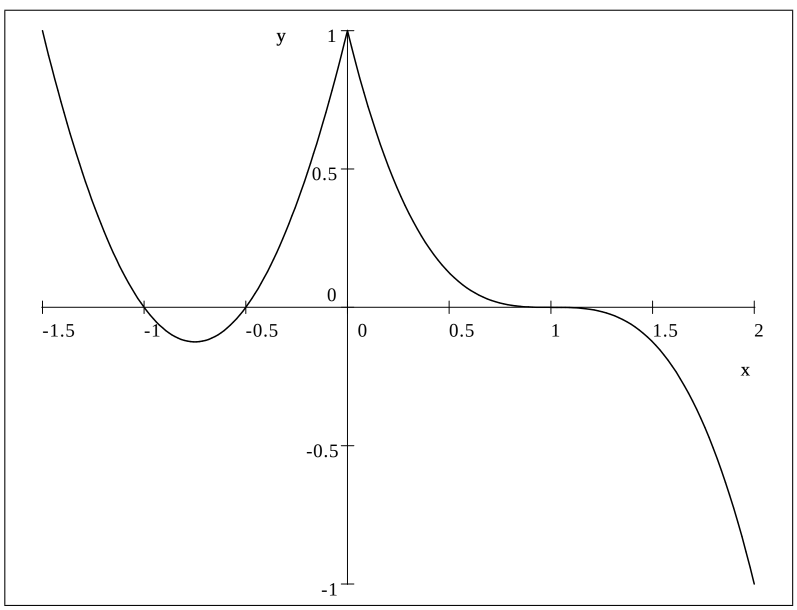
$$g''(x) = \begin{cases} 6(1-x), \text{ för } 0 < x \leq 2 \\ 4, \text{ för } -1.5 \leq x < 0 \end{cases}$$

Funktionen g har ett lokalt maximum $g(0) = 1$ i singulära punkten $x = 0$ eftersom $g' > 0$ för $x < 0$ nära origo (funktionen växer) och $g' < 0$ för $x > 0$ nära origo (funktione avtagar).

I endpunkten $x = -1.5$ antar funktionen sitt absoluta maximum $g(-1.5) = 1$. I endpunkten $x = 2$ antar funktionen sitt absoluta maximum $g(2) = -1$.

Vi ser också från uttrycket för g''att funktionen g är konkav uppåt på intervallet $-1.5 \leq x < 0$ och och på intrervallet $0 < x < 1$, där $g''(x) > 0$. På intervallet $1 < x < 2$ är g konkav neråt.

I punkten $x = 1$ är funktionen derivarbar och när den punkten för $x < 1$ är g konkav uppåt och för $x > 1$ är g konkav neråt. Det medför att $x = 1$ är en böjningspunkt (inflection point). Grafen för funktionen ser ut som:



5. **Taylors polynom.** Ange Taylors polynom av ordning 2 runt punkten $a = 0$ med felterm på Lagranges form för funktionen:

$f(x) = \arcsin(x)$.

$\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\frac{d^2}{dx^2} \arcsin(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)}$;

$\frac{d^3}{dx^3} \arcsin(x) = \frac{\left(2x^2+1\right)}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{\left(2x^2+1\right)}{(1-x^2)^{5/2}}$; (4p)

$\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}\left[\frac{\left(2s^2+1\right)}{(1-s^2)^{5/2}}\right] x^3$, där s ligger mellan 0 och x.

6. **Gränsvärde.** Beräkna gränsvärdet:

   Du får använda Taylors polynom, l'Hôpitals regel eller andra resonemang enligt din smak.

   $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(\cos(x))}{x^2}\right) \tag{4p}$$

   $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(\cos(x))}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1-0.5x^2+O(x^4))}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-0.5x^2+O(x^4)}{x^2}\right) = -0.5$

   Vi använt Taylors polynom för $\cos(x)$ och $\ln(1+x)$ runt $x=0$.

7. **Linje i rummet.** Bestäm minimalt avstånd mellan linjen $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{2}$,

   och punkten $(7,9,7)$. (4p)

   Vi skriver först allmän lösning till problemet för en linje genom punkten $\overrightarrow{R_0}$ med riktningsvektorn $\overrightarrow{v}$ med ekvation:

   $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{R_0} + t\overrightarrow{v}$ och en given punkt $\overrightarrow{P}$.

   Det sökta avståndet d är lika med $d = \left\|\overrightarrow{P} - \overrightarrow{R_0}\right\|\sin(\theta)$ där θ är vinkeln mellan vektorn $\overrightarrow{R_0} - \overrightarrow{P}$ och linjens riktningsvektor $\overrightarrow{v}$. Formeln för vektorprodukten $\left\|\left(\overrightarrow{P} - \overrightarrow{R_0}\right)\times\overrightarrow{v}\right\| = \sin(\theta)\left\|\overrightarrow{P} - \overrightarrow{R_0}\right\|\,\|\overrightarrow{v}\|$ medför att

   $$\sin(\theta) = \frac{\left\|\left(\overrightarrow{P} - \overrightarrow{R_0}\right)\times\overrightarrow{v}\right\|}{\left\|\overrightarrow{P} - \overrightarrow{R_0}\right\|\,\|\overrightarrow{v}\|} \text{ och } d = \left\|\overrightarrow{P} - \overrightarrow{R_0}\right\|\frac{\left\|\left(\overrightarrow{P} - \overrightarrow{R_0}\right)\times\overrightarrow{v}\right\|}{\left\|\overrightarrow{P} - \overrightarrow{R_0}\right\|\,\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{\left\|\left(\overrightarrow{P} - \overrightarrow{R_0}\right)\times\overrightarrow{v}\right\|}{\|\overrightarrow{v}\|}.$$

   I problemet har vi $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix}4\\3\\2\end{bmatrix}$; $\overrightarrow{R_0} = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$; $\overrightarrow{P} = \begin{bmatrix}7\\9\\7\end{bmatrix}$. $\left(\overrightarrow{P} - \overrightarrow{R_0}\right) = \begin{bmatrix}7\\9\\7\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\8\\7\end{bmatrix}$

   $$\left(\overrightarrow{R_0} - \overrightarrow{P}\right)\times\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix}5\\8\\7\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4\\3\\2\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 5 & 8 & 7\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix} = -5\overrightarrow{i} + 18\overrightarrow{j} - 17\overrightarrow{k} = \begin{bmatrix}-5\\18\\-17\end{bmatrix}.$$

   $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{4^2+3^2+2^2} = \sqrt{29}$;

   $\left\|\left(\overrightarrow{R_0} - \overrightarrow{P}\right)\times\overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{5^2+18^2+17^2} = \sqrt{25+324+289} = \sqrt{638}$.

   $d = \left\|\left(\overrightarrow{P} - \overrightarrow{R_0}\right)\times\overrightarrow{v}\right\| / \|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{638/29} = \sqrt{22}$.

8. **Plan i rummet.** Ange ekvation för planet som skär sträckor -2, 1, 2 av x, y, z - koordinataxlarna och bestäm avståndet mellan det planet och origo.

(4p)

Ekvationen för det planet är: $\dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{1} + \dfrac{z}{2} = 1$

Avståndet d mellan ett plan med ekvationen $Ax + By + Cz - D = 0$ och med normal $\overrightarrow{N} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$ och en punkt $\overrightarrow{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$ är

$$d = [AP_x + BP_y + CP_z - D] \, / \left\| \overrightarrow{N} \right\| = |AP_x + BP_y + CP_z - D| \, / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Om P är origo $\overrightarrow{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ får vi: $d = |D| \, / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. I vårt fall $\overrightarrow{N} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$, $D = -1$.

$$d = |D| \, / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 1/\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{1}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+4+1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättats, sen ta den som känns vara näst lättast o.s.v.

Maxpoäng: 32 ; **3:** 16; **4:** 22; **5:** 26