MATEMATIK	Datum: 2009-01-16	Tid:
Chalmers	Hjälpmedel: inga	
A.Heintz	Telefonvakt: ....Tel.: 0762-721860	

Lösningar till tentan i TMV036 Analys och linjär algebra K/Bt/Kf, del A.

1. **Sats.** i) Ange definitionen på inversfunktionen till en given funktion.

   Låt f vara en funktion definierad på en mängd av tal D_f och har värdesmängd $V_f = \{y = f(x)$, för x från $D_f\}$. Om om inget y från V_f , $y = f(x)$ ges av två olika $x \neq x^*$. D.v.s. $f(x) \neq f(x^*)$ för $x \neq x^*$, så finns en inversfunktion f^{-1} till f som är definierad på $D_{f^{-1}} = V_f$ sådan att

   $f^{-1}(y) = x$ för $y = f(x)$. f blir i sin tur en inversfunktion till f^{-1}. Det gör att $f(f^{-1}(y)) = y$ för y från $D_{f^{-1}}$ och $f^{-1}(f(x)) = x$ för x från D_f.

   ii) Formulera och bevisa formeln för derivatan av inversfunktionen. (4p)

   Använd kedjeregeln och egenskaper hos inversfunktion: $f(f^{-1}(y)) = y$, $f^{-1}(f(x)) = x$, $f(x) = y$.

   $\frac{d}{dx}\left[f^{-1}(f)\right](x) = \frac{d}{dx}[x] = 1$; $\frac{d}{dx}\left[f^{-1}(f(x))\right] = \frac{d}{dy}\left[f^{-1}\right](f(x)) \cdot \frac{d}{dx}[f](x) = 1$;

   $\frac{d}{dy}\left[f^{-1}\right](f(x)) = \frac{1}{\frac{d}{dx}[f](x)}$; $\frac{d}{dy}\left[f^{-1}\right](y) = \frac{1}{\frac{d}{dx}[f](f^{-1}(y))}$.

2. **Gränsvärde.** i) Ange definitionen på gränsvärde av en funktion. Låt f vara en funktion definierad på ett öppet intervall (c, d) kanske förutom punkt a så att $c < a < d$. Talet L är gränsvärde av f då $x \to a$ om

   för varje godtyckligt litet $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta_\varepsilon > 0$ sådan att om $|x - a| \leq \delta_\varepsilon$ så är $|f(x) - L| \leq \varepsilon$, eller

   om $a - \delta_\varepsilon \leq x \leq a + \delta_\varepsilon$ så är $L - \varepsilon \leq f(x) \leq L + \varepsilon$.

   ii) Beräkna gränsvärdet: $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{b}}{x - b}$, där $b > 0$. (4p)

   använd formeln: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

   $\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{b}}{x-b} = \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{b}}{\left(x^{1/3}-b^{1/3}\right)\left(x^{2/3}+x^{1/3}b^{1/3}+b^{2/3}\right)} = \frac{1}{\left(x^{2/3}+x^{1/3}b^{1/3}+b^{2/3}\right)}$;

   Detta medför att $\lim\limits_{x\to b} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{b}}{x-b} = \lim\limits_{x\to b} \frac{1}{\left(x^{2/3}+x^{1/3}b^{1/3}+b^{2/3}\right)} = \frac{1}{3\left(b^{2/3}\right)}$

3. **Kontinuitet.** Formulera definitionen på funktion kontinuerlig i en punkt. Två givna funktioner f och g, båda är odefinierade i punkt $x = 0$.Ange om någon av dem kan utvidgas till punkten $x = 0$ (d.v.s. om $f(0)$ kan definieras i punkten $x = 0$) så att funktionen blir kontinuerlig i den punkten. I fall det är möjligt ange hur man kan göra det.

   $$\begin{aligned} f(x) &= \sin(1/x^2); -\pi/2 < x < \pi/2,\ x \neq 0, \\ g(x) &= \frac{\ln(1+x)}{x}; -1 < x < 1,\ x \neq 0. \end{aligned}$$

   Funktionen $f(x) = \sin(1/x^2)$ saknar gränsvärde då $x \to 0$ eftersom den antar oändligt många gånger värdena $+1$ och -1 då $x \to 0$. sin är en periodisk funktion och $1/x^2$ växer oändligt då $x \to 0$.

   Det gör att inget tal L kan vara samtidigt nära alla värdena $f(x)$, speciellt värdena

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Det är ett standart gränsvärde och kan visas med hjälp av Taylors utveckling för ln eller med hjälp av H'lopitals regel. Taylors utveckling för ln runt $x = 1$: $\ln(1+x) = \ln(1) + \ln'(1)\cdot x + O(x^2) = 0 + \frac{1}{1}x + O(x^2)$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+O(x^2)}{x} = 1$.Om vi definierar $g(0) = 1$, blir g kontinuerlig i $x = 0$.

4. **Derivering.** Beräkna derivatan till funktionen

   $f(x) = \left(\arctan(x^2)\ \right)^{\sqrt{1-x^2}} = \exp\left(\ln\left(\arctan(x^2)\ \right)\sqrt{1-x^2}\right)$ (4p)

   $\frac{d}{dx}\left(\left(\arctan(x^2)\ \right)^{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\exp\left(\ln\left(\arctan(x^2)\ \right)\sqrt{1-x^2}\right)\right) =$

   $2\frac{x}{x^4+1}\sqrt{1-x^2}\,(\arctan(x^2))^{\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)} - x\frac{\ln\left(\arctan x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}\,(\arctan(x^2))^{\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)} =$

   $(\arctan(x^2))^{\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)}\left[2\frac{x}{x^4+1}\sqrt{1-x^2} - x\frac{\ln\left(\arctan x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

5. **Extrempunkter.** Bestäm alla lokala extrempunkter, och absolut maximum och absolut minimum (om de existerar) till följande funktion:

   $g(x) = x\,e^{-x^2}$

   definierad för alla reella tal x. Bestäm också böjningspunkter (inflection points), och de intervall där funktionen är konkav uppåt och konkav neråt. Rita en skiss av grafen till funktionen. Motivera svaret! (4p)

   $\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x\,e^{-x^2}\right) = e^{-x^2}\left(1-2x^2\right).$

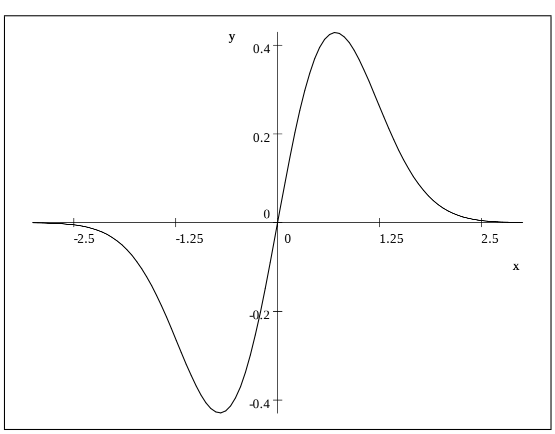
   Stationära punkter till g är: $x_1 = 1/\sqrt{2}$ och $x_2 = -1/\sqrt{2}$. Funktionen har inga singulära punkter, eftersom derivataan existerar för alla reella x.

   $\frac{d^2g}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)\right) = 4x^3e^{-x^2} - 6xe^{-x^2} = 2xe^{-x^2}\left(2x^2-3\right).$

   Inflection points är rötter till andraderivatan $\frac{d^2g}{dx^2}$ av g: $x_{3,4} = \pm\sqrt{3/2}$.

   Andra derivatan är positiv i x_2 och är negativ i x_1. Det visar att g har ett lokalt minimum i x_2 och har ett lokalt maximum i x_1. De är också absoluta maximum och minimum, eftersom $g(x)\to 0$ när $x\to\pm\infty$.

   max $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp(-1/2)$, min $g(x) = \frac{-1}{\sqrt{2}}\exp(-1/2)$. Funktionen g är konkav uppåt för $-\sqrt{3/2} < x < 0$ och för $\sqrt{3/2} < x$. Funktionen g är konkav neråt för $x < -\sqrt{3/2}$ och för $0 < x < \sqrt{3/2}$.



$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\ln(1+\sin(x))\right) = \frac{\cos x}{\sin x+1}$

$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x+1}\right) = -\frac{1}{\sin x+1}$

$f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{\sin x+1}\right) = \frac{\cos x}{(\sin x+1)^2}$

Taylorsutveckling: $f(x) = \ln(1+\sin(x)) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + O\left(x^4\right)$

7. **Plan i rummet.** Bestäm avståndet mellan punkten M med koordinater $(4,3,1)$ och planet given av ekvationen: $3x - 4y + 12z + 14 = 0$. (4p)

   Avståndet L mellan ett plan $Ax + By + Cz + D = 0$ och en punkt $M(x_0, y_0, z_0)$ beräknas enligt formeln:

   $L = \left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|.$

   I vårt fall $L = \left|\frac{3\cdot 4-4\cdot 3+12\cdot 1+14}{\sqrt{9+16+144}}\right| = \left|\frac{12+14}{\sqrt{169}}\right| = \frac{26}{13} = 2.$

8. **Vektorprodukt.** Tre punkter i rummet A, B, C, är givna av sina koordinater: $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$, $C(4,3,5)$. Bestäm arean av triangeln ABC.

   Arean S av triangeln byggt på två vektorer $\overrightarrow{V}$ och $\overrightarrow{P}$ beräknas med hjälp av vektorprodukt. (4p)

   $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{V} \times \overrightarrow{P}\right|$, eftersom $\left|\overrightarrow{V} \times \overrightarrow{P}\right| = \sin(\theta)\left|\overrightarrow{P}\right|\left|\overrightarrow{V}\right|$

   I vårt fall kan vektorer längs trinagelns sidor väljas på flera sätt, till exempel $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{AC}$.

   $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ Vektorprodukt $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \det \begin{bmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} =$ $2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k} - \overrightarrow{j} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

   $S = \frac{1}{2}\sqrt{2^2+1^2+1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{6}.$

   Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättats, sen ta den som känns vara näst lättast o.s.v.

Maxpoäng: 32 ; **3:** 16; **4:** 22; **5:** 26