MATEMATIK
Chalmers
A.Heintz

Datum: 2010-01-14
Hjälpmedel: inga
Telefonvakt: David Witt-Nuström

Tid: eftermiddag

Tel.: 0762-721861

Lösningar till tenta i TMV036/TMV035 Analys och linjär algebra K/Bt/Kf, del A.

1. **Sats** Formulera och ange bevis till Rolles sats. (4p)

2. **Gränsvärde och kontinuitet.** 1) Ange definition för funktion kontinuerlig i en inre punkt på definitionsintervall.

   2) Betrakta följande funktion:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x)\cos(\frac{1}{x}), & \text{för } x \neq 0 \text{ och } -0.25 \leq x \leq 0.25 \\ 1, & \text{för } x = 0 \end{cases}$$

   Bestäm om f är kontinuerlig i origo eller inte och ange ett fullständigt bevis. (4p)

   En funktion är kontinuerlig i en inre punkt a på definitionsintervall om $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

   Funktionen är kontinuerlig i alla pinkter förutom punkten $x = 0$ som sammnsättning av kontinuerliga funktioner. För att bestämma om f är kontinuerlig i origo måste vi beräkna $\lim_{x\to 0} \ln(1+x)\cos(\frac{1}{x})$.

   $\left|\cos(\frac{1}{x})\right| \leq 1$ för $x \neq 0$. Detta medför att

$$-\left|\ln(1+x)\right| \leq \ln(1+x)\cos(\frac{1}{x}) \leq \left|\ln(1+x)\right|$$

   Vi vet att $\lim_{x\to 0} \ln(1+x) = 0$ eftersom $\ln(1+x)$ har derivatan $\frac{1}{1+x}$ och är kontinuerlig funktion och $\ln(1) = 0$.

   Detta medför att $\lim_{x\to 0} \ln(1+x)\cos(\frac{1}{x}) = 0 \neq f(0)$. Vi har då att f är inte kontinuerlig i origo.

3. **Derivering.** Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = \frac{\sqrt{\ln(1+x^3)}}{\sin(x^3)} \qquad (4p)$$

$\frac{d}{dx}\sqrt{\ln(1+x^3)} = \frac{3}{2}\frac{x^2}{(x^3+1)\ln^{\frac{1}{2}}(x^3+1)}$

$\frac{d}{dx}\sin(x^3) = 3x^2\cos x^3$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{\ln(1+x^3)}}{\sin(x^3)}\right) = \frac{\left[\frac{3}{2}\frac{x^2}{(x^3+1)\ln^{\frac{1}{2}}(x^3+1)}\right]\sin\left(x^3\right) - 3x^2\cos x^3\sqrt{\ln(1+x^3)}}{\left(\sin(x^3)\right)^2} =$$

$$\frac{3x^2\sin x^3 - 6x^2\cos x^3\ln\left(x^3+1\right) - 6x^5\cos x^3\ln\left(x^3+1\right)}{\ln^{\frac{1}{2}}(x^3+1) + x^3\ln^{\frac{1}{2}}(x^3+1) - \ln^{\frac{1}{2}}(x^3+1)\cos 2x^3 - x^3\ln^{\frac{1}{2}}(x^3+1)\cos 2x^3}$$

4. **Tillämpning av derivator.** Betrakta funktionen :

$$g(x) = \begin{cases} 12x - 9x^2 + 2x^3, & \text{för } 0 \le x \le 3 \\ -x\,(x+3)\,, & \text{för } -2 \le x < 0 \end{cases}$$

definierad på intervallet $[-2,\ 3]$. Bestäm alla singulära punkter, lokala extrempunkter, absolut maximum och absolut minimum på det intervallet (om de existerar). (4p)

Bestäm böjningspunkter (inflection points), och de intervall där funktionen är konkav uppåt och konkav neråt. Rita en skiss av grafen till funktionen. (2p)

Funktionen är kontinuuerlig på hela definitionsintervallet $-2 \le x \le 3$ eftersom $\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to-0} = 0$.

Vi betraktar funktionen separat på intervall $0 \le x \le 3$, på intervall $-2 \le x < 0$ och i punkten $x = 0$.

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx}\left(12x - 9x^2 + 2x^3\right), & \text{för } 0 \le x \le 3 \\ \frac{d}{dx}\left(-x\,(x+3)\right), & \text{för } -2 \le x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 6(x^2 - 3x + 2), & \text{för } 0 \le x \le 3 \\ -2x - 3, & \text{för } -2 \le x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 6(x-1)(x-2), & \text{för } 0 \le x \le 3 \\ -2(x + 3/2), & \text{för } -2 \le x < 0 \end{cases}$$

$$g''(x) = \begin{cases} \frac{d^2}{dx^2}\left(12x - 9x^2 + 2x^3\right), & \text{för } 0 \le x \le 3 \\ \frac{d^2}{dx^2}\left(-x\,(x+3)\right), & \text{för } -2 \le x < 0 \end{cases} = \begin{array}{l} 12(x - 3/2), \ \text{för } 0 \le x \le 3 \\ -2, \ \text{för } -2 \le x < 0 \end{array}$$

Funktionen g har en singulär punkt i origo eftersom derivatan saknas i origo: $\lim_{x\to-0} g'(x) = -3$, och $\lim_{x\to+0} g'(x) = +12$. Dessutom är den punkten ett lokalt minimum enligt kriterium men första derivatan.

Funktionen har tre stationära punkter: $x_1 = -3/2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$.

$x_1 = -3/2$ är ett lokalt maximum eftersom $g''(x_1) = -2 < 0$. $g(x_1) = 9/4$.

$x_2 = 1$ är ett lokalt maximum eftersom $g''(x_2) = -6 < 0$. $g(x_2) = 5$.

$x_3 = 2$ är ett lokalt minimum eftersom $g''(x_3) = +6 > 0$. $g(x_3) = 4$.

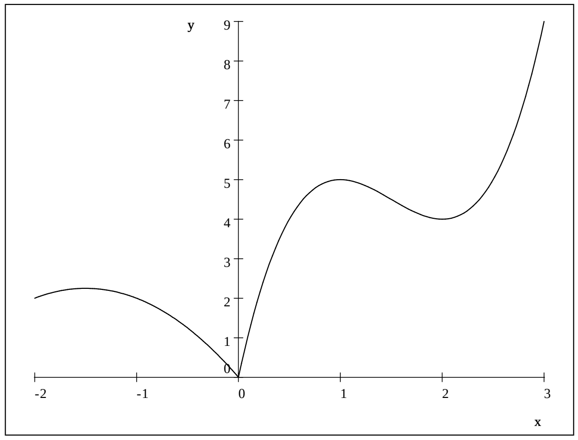
Endpunkten $x_4 = -2$ är ett lokalt minimum eftersom $g'(x_4) = -5 < 0$. $g(x_4) = 2$.

Endpunkten $x_5 = 3$ är ett lokalt minimum eftersom $g'(x_5) = 12 > 0$. $g(x_5) = 9$

Vi inser att g antar sitt absolut maximum i $x_5 = 3$ och absolut minimum i $x = 0$.

Punkten $x = 3/2$ är en böjningspunkt. Funktionen är konkav neråt på intervall: $-2 < x < 0$ och på intervall $0 < x < 3/2$. Funktionen är konkav uppåt på intervall: $3/2 < x < 3$. Grafen till funktionen:

.



5. **Taylors polynom.** Ange Taylors polynom av grad 2 runt punkten $a = 0$ med felterm på Lagranges form för funktionen:

   $f(x) = \ln(1+x)$. Uppskatta feltermen i fall $x = 0.1$. (4p)

   $f'(x) = \frac{d}{dx}\ln(1+x) = \frac{1}{x+1}\Big|_{x=0} = 1$

   $f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}\ln(1+x) = -(x+1)^{-2}\Big|_{x=0} = -1$

   $f'''(x) = \frac{d^3}{dx^3}\ln(1+x) = 2(x+1)^{-3}\Big|_{x=0} = 2$

   Allmän Taylors formel på Lagranges form:

   $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{1}{2}x^2 + f'''(s)\frac{1}{6}x^3$

   där s är ett tal mellan x och 0. Med att sätta in värdena av derivator

   $f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{1}{2}x^2 + f'''(s)\frac{1}{6}x^3 = x - \frac{1}{2}x^2 + 2(s+1)^{-3}\frac{1}{6}x^3 =$

   Feltermen $2(s+1)^{-3}\frac{1}{6}x^3 = (s+1)^{-3}\frac{1}{3}0.001 \le \frac{1}{3}0.001$ eftersom $(s+1)^{-3}$ är en monoton avtagane funktion och $(s+1)^{-3} < 1$ för $0 \le s \le 0.1$.

   Vi får att $\ln(1.1) = 0.1 - 0.05 + E = 0.05 + E$ där felet $0 \le E \le \frac{1}{3}0.001$.

6. **Gränsvärde.** Beräkna gränsvärdet:$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(x^2)}{\ln(\cos(2x))}\right)$ (4p)

   Du får använda l'Hôpitals regel eller Taylors polynom.

   $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x^2)}{\ln(\cos(2x))}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+O(x^6)}{\ln(1-4x^2/2+O(x^4))}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+O(x^6)}{-2x^2+O(x^4)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+O(x^4)}{-2+O(x^2)}\right) = -0.5$

   Samma gränsvärde med l'Hopitals regel:

   $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x^2)}{\ln(\cos(2x))}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\sin(x^2)}{\frac{d}{dx}\ln(\cos(2x))} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x^2}{-\frac{2}{\cos 2x}\sin 2x} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{-\frac{1}{\cos 2x}}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}\right) = -0.5$

7. **Geometri i rummet.** Bestäm minimalt avstånd mellan punkten med koordinater $(7, 9, 7)$ och linjen med ekvationer $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$. (4p)

   Avståndet kan beräknas med hjälp av formeln:

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{V} \times \overrightarrow{\tau}\right|}{\left|\overrightarrow{\tau}\right|}$$

där vektorn $\overrightarrow{V}$ är vektorn mellan punkten $(7,9,7)$ och punkten $(2,1,0)$ på linjen, $\overrightarrow{V} = (5,8,7)$ och $\overrightarrow{\tau}$ är riktingsvektorn av linjen: $\overrightarrow{\tau} = (4,3,2)$

$\overrightarrow{V} \times \overrightarrow{\tau} = \det \begin{bmatrix} \overrightarrow{e}_x & \overrightarrow{e}_y & \overrightarrow{e}_z \\ 5 & 8 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} = 5\overrightarrow{e}_x + 18\overrightarrow{e}_y - 17\overrightarrow{e}_z = \begin{bmatrix} 5 \\ 18 \\ -17 \end{bmatrix}$

$|\overrightarrow{\tau}| = \sqrt{4^2+3^2+2^2} = \sqrt{16+9+4} = \sqrt{29}$

$\left|\overrightarrow{V} \times \overrightarrow{\tau}\right| = \sqrt{5^2+18^2+17^2} = \sqrt{638};$

$d = \sqrt{\frac{638}{29}} = \sqrt{22}.$

8. **Geometri i rummet.** Betrakta två plan givna av sina ekvationer: $4x-y+3z-1=0$ och $x+5y-z+2=0$.

   Bestäm planet som går genom deras skärningslinje och genom origo. (4p)

   Betrtakta knipe av plan som går genom skärningslinjen och uppfyller ekvationen: $4x-y+3z-1+\lambda\,(x+5y-z+2)=0$.

   Sökta planet måste uppfylla den sista ekvationen för något tal λ och speciellt måste uppfylla den för $x=0$, $y=0$, $z=0$:

$$-1+2\lambda=0$$

$\Longrightarrow \lambda = 0.5$.Dett medför att sökta planet uppfyller ekvationen:

$$4x-y+3z-1+0.5\,(x+5y-z+2)=0$$

För att få enklare tal, multiplicera ekvationen med 2:

$$8x-2y+6z-2+x+5y-z+2=0$$

Sökta planet uppfyller ekvationen:

$$9x+3y+5z=0$$

Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättats, ta sedan den som känns vara näst lättast o.s.v.

Maxpoäng: 34 ; **3:** 17; **4:** 22; **5:** 27