MATEMATIK
Chalmers
A.Heintz

Datum: 2009-17-08 Tid: förmiddag
Hjälpmedel: inga
Telefonvakt: Julia Magnusson Tel.: 0762-721861

Lösningar till tenta i TMV036/TMV035 Analys och linjär algebra K/Bt/Kf, del A.

1. **Sats.** Ange ett fullständigt bevis till formeln för derivatan av produkt av två funktioner. (4p)

2. **Derivering.** Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = \frac{\exp(1 + x^{0,5})}{\arcsin(x^{3,5})};$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\exp(1+x^{0.5})}{\arcsin(x^{3.5})}\right) = \frac{0.5}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^7}\arcsin^2\left(x^{\frac{7}{2}}\right)}\left(\sqrt{1-x^7}\left(\arcsin\left(x^{\frac{7}{2}}\right)\right)e^{x^{0.5}+1} - 7x^3e^{x^{0.5}+1}\right)$$

(4p)

3. **Tillämpning av derivator.** Betrakta funktionen : $= |x|(x-2)(x-1)$ definierad på intervallet $[-1, 3]$.

Bestäm alla singulära punkter, lokala extrempunkter, absolut maximum och absolut minimum på det intervallet (om de existerar). (4p)

Vi betraktar funktionen separat för $x > 0$ och $x \leq 0$:

$$g(x) = \begin{cases} x(x-2)(x-1), & x > 0 \\ -x(x-2)(x-1), & x \leq 0 \end{cases}$$

$g'(x) = \frac{d}{dx}(x(x-2)(x-1)) = 3x^2 - 6x + 2$, för $x > 0$

$g'(x) = \frac{d}{dx}(-x(x-2)(x-1)) = -3x^2 + 6x - 2$, för $x \leq 0$

Söker stationära punkter: $3x^2 - 6x + 2 = 0$. Samma ekvation gäller för $x > 0$ och $x \leq 0$. Det finns två stationära punkter: $x_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} + 1$: $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

Funktionen g är kontinuerlig i origo men vänster derivatan $g'_{left}(0) = -2$ och höger derivatan $g'_{right}(0) = 2$ i origo är olika. Det betyder att origo är en singulär punkt. Funktionen har ett lokalt minimum i den punkten.

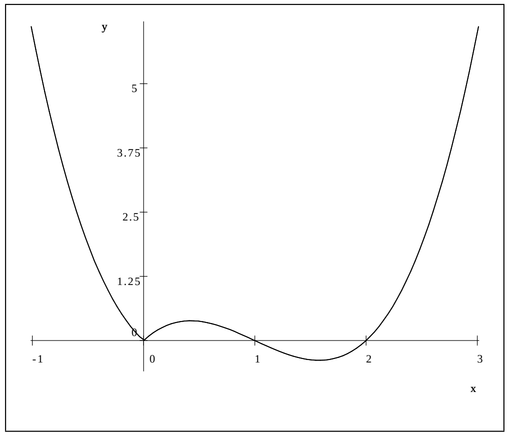
$g''(x) = \frac{d^2}{dx^2}(x(x-2)(x-1)) = 6x - 6$, för $x > 0$

$g''(x) = \frac{d^2}{dx^2}(-x(x-2)(x-1)) = 6 - 6x$, för $x \leq 0$

$g''(x_1) = g''(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) > 0$, $g''(x_2) = g''(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) \leq 0$. Detta medför att x_1 är ett lokalt maximum och x_2 är ett lokalt minimum. I endpunkten $x = -1$, $g(-1) = 6$. I endpunkten $x = 3$, $g(3) = 3(3-2)(3-1) = 6$. Funktionen har lokala maxima i dessa punkter eftersom $g'(-1) = -11 < 0$ och $g'(3) = 11 > 0$. De är också globala maxima eftersom $g(3) > g(1-\frac{1}{\sqrt{3}})$. Globalt minimum antas i punkten $1+\frac{1}{\sqrt{3}}$ efersom $g(1+\frac{1}{\sqrt{3}}) < 0$ och $g(0) = 0$.

Bestäm böjningspunkter (inflection points), och de intervall där funktionen är konkav uppåt och konkav neråt. Rita en skiss av grafen till funktionen. (2p)

Funktionen g har en böjningspunkt i punkten $x = 1$ efterson $g''(1) = 0$ och derivatan g' är kontinuerlig i den punkten. Vi kollar tecken av andra derivatan g''. Funktionen g är konkav uppåt på intervall $[-1, 0)$ och $(1, 3]$ eftersom $g'' > 0$ där. Funktionen g är konkav neråt på intervall $[\ (0, 1)$ eftersom $g'' > 0$ där.



4. Ange approximation av funktionen $f(x) = \ln(x)$ i punkten $x = 0,9$ med Taylors polynom av grad 2 runt punkten $a = 1$ och felterm på Lagranges form. Uppskatta feltermen. (4p)

   Allmän formel är: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi)(x-a)^3$, där ξ ligger mellan x och a.

   $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $\ln'''(x) = \frac{2}{x^3}$. $\ln(1) = 0$, $\ln'(1) = 1$, $\ln''(1) = -1$, $\ln'''(1) = 2$. Detta medför att

   $f(x) = 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}\frac{1}{\xi^3}(x-a)^3$. Vi lägger märke till att maximum av $\frac{1}{\xi^3}$ på intervallet $[0.9, 1]$

   antas i punkten $\xi = 0.9$. Detta medför att $f(0.9) = -0.1 - \frac{1}{2}(0.1)^2 + \frac{1}{3}\frac{1}{\xi^3}(-0.1)^3 = -0.105 - \frac{0.001}{3}\frac{1}{\xi^3}$.

   $f(0.9) \approx -0.105$ och felet av approximationen är negativt och dess absolut belopp är mindre än $\frac{1}{3}\frac{1}{\xi^3}(0.1)^3 \frac{0.001}{3}\frac{1}{0.9^3} = \frac{1}{2187} \approx 4.572\,5 \times 10^{-4}$

5. **Gränsvärde.** Beräkna gränsvärdet:$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan(x^3)}{x-\sin(x)}\right)$ (4p)

   Du får använda Taylors utveckling eller l'Hôpitals regel. Tayrorsutveckling av sin och tan medför att

   $\tan(x^3) = x^3 + O(x^6)$, $x \to 0$. och

   $x - \sin(x) = x - (x - x^3/(3!) + O(x^5)) = x^3/6 + O(x^5)$, $x \to 0$.

   Det är lätt att se att

   $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(x^3)}{x-\sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3 + O(x^6)}{x^3/6 + O(x^5)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1 + O(x^3)}{1/6 + O(x^2)}\right) = 6.$$

6. **Geometri i rummet.** Bestäm arean av en triangel i rummet som har hörnpunkter med koordinater: $A(-1,2,3)$, $B(5,-3,4)$, $C(2,1,6)$. (4p)

   Vi betecknar med $\overrightarrow{AB}$ vektorn mellan punkterna A och B, och $\overrightarrow{AC}$ vektorn mellan punkterna A och C.

   Triangelns area kan framställas som $Arean_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$.

   Vektorn $\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, Vektorn $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 6 & -5 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} = 9\overrightarrow{e_3} - 15\overrightarrow{e_2} - 14\overrightarrow{e_1}.$$

$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{14^2 + 15^2 + 9^2} = \sqrt{196 + 225 + 81} = \sqrt{502}$. $Arean_{ABC} = 0.5\sqrt{502}$.

7. **Geometri i rummet.** Ange en ekvation för planet som går genom punkten B med koordinater: $(3; 0; 5) = (B_x, B_y, B_z)$, och är parallelt med planet $x - 4y + 5z - 1 = 0$. (2p)

   Bestäm avståndet mellan dessa två plan. (2p)

   Det sökta planet måste ha samma normal som det givna planet, d.v.s. $\overrightarrow{N} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$.

   Allmän ekvation på vektorform för ett plan genom en punkt $\overrightarrow{r}_0$ är $\overrightarrow{N} \cdot (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0) = 0$, eller

   $(x - 3) - 4y + 5(z - 5) = 0$.

   Avståndet mellan dessa plan är samma som avståndet mellan punkten B och givna planet:

   $d = \frac{(B_x - 4B_y + 5B_z - 1)}{\left|\overrightarrow{N}\right|} = (B_x - 4B_y + 5B_z - 1) / \sqrt{1^2 + 4^2 + 5^2} =$

   $(3 - 0 + 5 \cdot 5 - 1) / \sqrt{1^2 + 4^2 + 5^2} = 27/\sqrt{42}$.

8. **Geometri i rummet.** Bestäm för vilka koefficienter B och D linjen definierad av ekvationssystemet$\begin{cases} x - 2y + z - 9 = 0 \\ 3x + By + z + D = 0 \end{cases}$ ligger i x-y planet? (4p)

   Linjen ligger i $x - y$ planet i fall all punkter av linjen har z-koordinaten noll. Vi löser system ekvationer för $z = 0$:

   $$\begin{cases} x - 2y - 9 = 0 \\ 3x + By + D = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 2y + 9 \\ 3(2y + 9) + By + D = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 2y + 9 \\ 6y + 27 + By + D = 0 \end{cases}$$

   Vi ser att andra ekvationen uppfylles för alla y bara om $D = -27$ och $B = -6$.

   Annan lösning använder geometriska resonemang. Linjens tangentvektor $\overrightarrow{\tau}$ måste ha z-komponentet $\tau_z = 0$.

   $\overrightarrow{\tau} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ B \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B - 2 \\ 2 \\ B + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix}$. Vi ser att $B + 6 = 0$ och $B = -6$.

   Ekvationen $6y + 27 + By + D = 0$ som ovan medför att $D = -27$.

   Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättats, ta sedan den som känns vara näst lättast o.s.v.

Maxpoäng: 34 ; **3:** 17; **4:** 22; **5:** 27