

Tenta i TMV036/TMV035 Analys och linjär algebra K/Bt/Kf, del A.

1. **Sats** Ange definitionen för gränsvärdet av en funktion. Ange ett geometriskt bevis till standart gränsvärde $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)$. (6p)

2. **Gränsvärde och kontinuitet.** 1) Ange definition för en funktion kontinuerlig i en inre punkt på definitionsintervall.

2) Betrakta följande funktion:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(\cos(x)), & \text{för } -0.5 \leq x < 0 \\ 1, & \text{för } x = 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & \text{för } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Bestäm om f är kontinuerlig i origo eller inte och ange ett fullständigt bevis. (6p)

3. **Derivering.** Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = \tan(\ln(x^2 + \sqrt{x})) \quad (4p)$$

4. **Tillämpning av derivator.**

5. Betrakta funktionen : $g(x) = \begin{cases} 1 - x^3 + 3x, & \text{för } 0 < x \leq 2 \\ \cos^2(x), & \text{för } -\pi/2 \leq x \leq 0 \end{cases}$ definierad på intervallet $[-\pi/2, 2]$.

a) Bestäm punkter där funktionen inte är kontinuerlig, singulära punkter, lokala extrempunkter, absolut maximum och absolut minimum på det intervallet. (6p)

b) Bestäm böjningspunkter (inflection points), och de intervall där funktionen är växande, avtagande, konkav uppåt och konkav neråt. Rita en skiss av grafen till funktionen. (4p)

6. **Taylors polynom.** Approximera funktionen: $f(x) = \sin(x - \pi/4)$ med Taylors polynom av grad 2 runt punkten $a = 0$ med felterm på Lagranges form. Uppskatta hur stor är feltermen i fall $x = -0, 1$. (6p)

7. **Gränsvärde.** Beräkna gränsvärdet: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1 + 3x^2}{\exp(x) - 1 - x}$ (6p)

8. **Geometri i rummet.** Skriv en ekvation för ett plan genom origo så att planet är vinkelrät mot två givna plan:

$$2x + y = 1 \text{ och } x + y + z = 5. \quad (6p)$$

9. **Geometri i rummet.** Bestäm minimala avståndet mellan linjen definierad av ekvationen $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$ och punkten $(7, 9, 7)$. (6p)

Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättast, ta sedan den som känns vara näst lättast o.s.v.

Maxpoäng: 50 ; **3:** 20; **4:** 30; **5:** 40