MATEMATIK	Datum: 2012-08-21	Tid: förmiddag
Chalmers	Hjälpmedel: inga	
A.Heintz	Telefonvakt: Peter Helgesson,	Tel.: 0703-088304

Lösningar till Tenta i TMV036/TMV035 Analys och linjär algebra K/Bt/Kf, del A.

1. **Sats.** Formulera och bevisa formeln för derivatan av produkt av två funktioner. (6p)

2. **Kontinuitet.** i) Formulera definitionen på funktion kontinuerlig i en punkt.

   ii) Två givna funktioner f och g, båda är odefinierade i punkt $x = 0$.Bestäm om någon av dem kan utvidgas till punkten $x = 0$ (d.v.s. om $f(0)$ eller $g(0)$ kan definieras i punkten $x = 0$) så att funktionen blir kontinuerlig i den punkten. I fall det är möjligt ange hur man kan göra det.

   $$\begin{aligned} f(x) &= \cos(1/x); \quad -\pi/2 < x < \pi/2, \quad x \neq 0, \\ g(x) &= (1+x)^x; \quad -1 < x < 1, \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

   För att ha en funktion f kontinuerlig i en punkt a $\lim_{x\to a} f(x)$ måste existera och $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

   Kontinuerlig utvidgning av funktion f till en punkt a är möjlig om $\lim_{x\to a} f(x)$ existerar.

   $\lim_{x\to 0} \cos(1/x)$ existerar inte eftersom det finns en följd av punkter $x_n = \frac{1}{\pi n}$, $n = 1, 2, 3, ...$sådan att för vilket som helst reelt tal r finns x_n hur som helst nära noll sådant att $|r - \cos(1/x_n)| \geq 1$. Vi lägger märke till att $\cos(1/x_n) = 1$, eller $\cos(1/x_n) = -1$ beroende av om n är jämt tal eller udda tal och påpekar att $x_n \to 0$, då $n \to +\infty$. Det gör kontinuerlig utvidgning av f till origo omöjlig.

   Gränsvärde $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}(1+x)^x = 1$.Det betyder att om vi utvidgar g till origo som $g(0) = 1$, så blir funktionen g kontinuerlig i origo.

3. **Derivering.** Beräkna derivatan av funktionen

   $$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right), \qquad (4p)$$

   $$\frac{d}{dx}\left(\arctan\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)\right) = \frac{1}{\frac{x^2}{\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)^2}+1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}+1} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)^2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

4. **Tillämpning av derivator.** Betrakta funktionen:

   $$g(x) = \begin{cases} \sin^2(x), & \text{för } 0 < x \leq \pi \\ -x^2 - 3x, & \text{för } -4 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

   a) Bestäm singulära punkter, lokala extrempunkter, absolut maximum och absolut minimum om de finns. (6p)

   b) Bestäm de intervall där funktionen är växande, avtagande, böjningspunkter (inflection points), och de intervall där funktionen är konkav uppåt och konkav neråt. Rita en skiss av grafen till funktionen. (4p)

Vi börjar med att beräkna derivatan $g'(x)$ för alla x från definitionsmängden förutom $x=0$, där vi inte vet ännu om derivatan finns.

$$g'(x) = \begin{cases} 2\sin(x)\cos(x), & \text{för } 0 < x \leq \pi \\ -2x-3, & \text{för } -4 \leq x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \sin(2x), & \text{för } 0 < x \leq \pi \\ -2x-3, & \text{för } -4 \leq x < 0 \end{cases}$$

Funktionen är kontinuerlig i den punkten eftersom $\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0$ och $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$. Vänster derivatan i $x=0$ är lika med 3, höger derivatan i $x=0$ är lika med noll. Så derivatan $g'(x)$ i $x=0$ existerar inte och g har singulär punkt i $x=0$.

Stationära punkter är nolställen av derivatan: $x_1 = -3/2$, $x_2 = \pi/2$, $x_3 = \pi$.

Lokala extrempunkter kan vara i endpunkter, stationära punkter eller i singulära punkten. Man kan använda första derivatans test.

$g'(-4+\varepsilon) > 0$ för liten $\varepsilon > 0$. Detta medför att g har ett lokalt minimum i $x=-4$.We check $g(-4) = -4$

$g'(-3/2-\varepsilon) > 0$, $g'(-3/2+\varepsilon) < 0$ för liten $\varepsilon > 0$. Detta medför att g har ett lokalt maximum i x_1.We check $g(-3/2) = 9/4$.

$g'(-\varepsilon) < 0$, $g'(\varepsilon) > 0$ för liten $\varepsilon > 0$. Detta medför att g har ett lokalt minimum i origo $x=0$. We check $g(0) = 0$.

$g'(\pi/2-\varepsilon) > 0$, $g'(\pi/2+\varepsilon) < 0$ för liten $\varepsilon > 0$. Detta medför att g har ett lokalt maximum i $x_2 = \pi/2$.We check $g(\pi/2) = 1$.

$g'(\pi-\varepsilon) < 0$, för liten $\varepsilon > 0$. Detta medför att g har ett lokalt minimum i $x_3 = \pi$.We check $g(\pi) = 0$.

Beräkningarna visar att g har ett absolut minimum i $x=-4$ och ett absolut maximum i punkten $x_1 = -3/2$.

Funktionen $g(x)$ är växande på intervallet $(-4, -3/2)$.

Funktionen $g(x)$ är avtagande på intervallet $(-3/2, 0)$.

Funktionen $g(x)$ är växande på intervallet $(0, \pi/2)$.

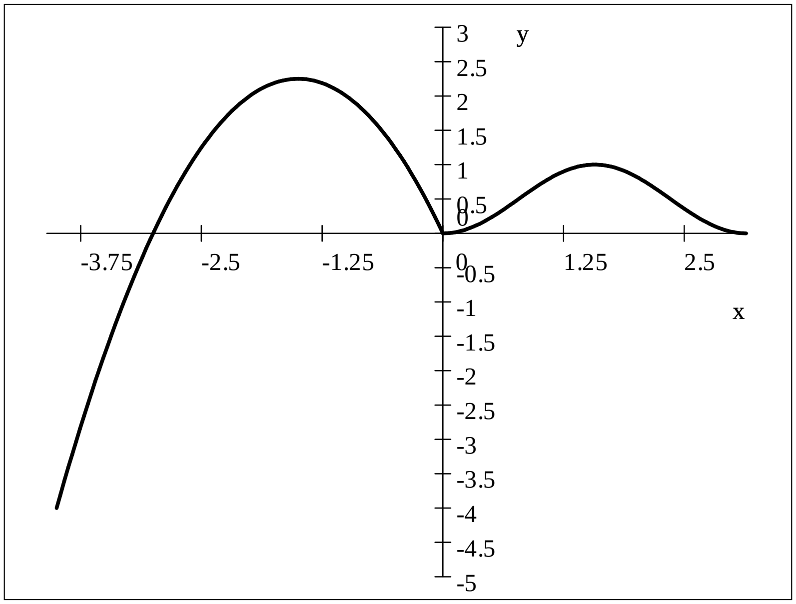
Funktionen $g(x)$ är avtagande på intervallet $(\pi/2, \pi)$.

$$g''(x) = \begin{cases} 2\cos(2x), & \text{för } 0 < x \leq \pi \\ -2, & \text{för } -4 \leq x < 0 \end{cases}$$

Funktionen har två böjningspunkter på intervallet $(0, \pi)$: $x = \pi/4$, och $x = 3/4\pi$ som är nollställen av $g''(x) = 0$. Andra derivatan i origo existerar inte, origo är en singulär punkt.

Funktionen g är konkav neråt på intervallet $(-4, 0)$ och på intervallet $(\pi/3, 3/4\pi)$.

Funktionen g är konkav uppåt på intervallet $(0, \pi/4)$ och på intervallet $(3/4\pi, \pi)$.



5. **Linjär approximation.** Betrakta funktion $f(x) = \ln(1+\sin(x))$ och dess linjär approximation för $x = 0,1$. Uppskatta feltermen för approximationen och ange intervallet där värdet $\ln(1+\sin(0,1))$ måste ligga. (6p)

   Vi approximerar f runt punkten $x = 0$.

   $L(x) = f(0) + f'(0)x;$

   Felet vid linjära approximationen är $E(x) = f(x) - L(x) = \frac{1}{2}f''(s)x^2$ där talet s uppfyller $0 \leq s \leq x$ i fall $0 < x$.

   $f'(x) = \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}$; $f''(x) = \frac{-\sin(x)(1+\sin(x))-\cos^2(x)}{(1+\sin(x))^2} = \frac{-1}{\sin(x)+1}$

   $L(x) = x$; $L(0,1) = 0,1$.

   Funktionen $f''(s) \leq 0$ och är växande för $0 \leq s \leq \pi/2$. Detta medför att

   $\frac{1}{2}f''(0) \cdot (0,1)^2 \leq E(0,1) \leq 0$ eller $-0,005 \leq E(0,1) \leq 0$. $0.1 - 0.005 : 0.095$

   $0,1 - 0,005 = 0,095$ och $0,095 \leq \ln(1+\sin(0,1)) \leq 0,1$.

6. **Gränsvärden och Taylors polynom.**

   Beräkna gränsvärdet: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(3x) - 3x}{\sin(x) + \ln(1-x) + x^2/2}$ (6p)

   We use Taylorutveckling av funktioner som ingår i uttrycket:

   $\frac{d}{dx}(\tan(3x)) = 3\tan^2 3x + 3$; $\frac{d^2}{dx^2}(\tan(3x)) = 6(\tan 3x)(3\tan^2 3x + 3)$; $\frac{d^3}{dx^3}(\tan(3x))$
   $= 6(3\tan^2 3x + 3)^2 + 36(\tan^2 3x)(3\tan^2 3x + 3)$

   $\tan(3x) = 3x + 9x^3 + O(x^4)$

   $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$

   $\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + O(x^4)$

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x) - 3x}{\sin(x) + \ln(1-x) + x^2/2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x + 9x^3 + O(x^4) - 3x}{x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5) - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + O(x^4) + x^2/2} =$$
   $$\lim_{x\to 0} \frac{9x^3 + O(x^4)}{-\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3}x^3 + O(x^4)} ==$$

$\lim_{x\to 0} \frac{9x^3+O\left(x^4\right)}{-\frac{3}{6}x^3+O(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{9+O(x)}{-\frac{3}{6}+O(x)} = \frac{9}{-\frac{3}{6}} = -18$

Man kan också använda L'Hopitals formel, men man behöver derivera tre gånger i alla fall.

7. **Geometri i rummet.** Ange en ekvation för ett plan genom en linje och genom origo. Linjen är given på standart form: $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{1}$.

Ett plan definieras av en punkt och en normalvektor.

Punkten $(2,3,2)$ ligger på den givna linjen och i planet. Det saknas normalriktning.

Vektorn $(2,3,2)$ mellan punkten origo och punkten $(2,3,2)$ är parallell med planet. Linjens riktningsvektorn $(-1,2,1)$ är också parallel med planet. Deras vektorprodukt är en normalvektor till sökta planet.

$$\overrightarrow{N} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \overrightarrow{i} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \overrightarrow{j} \det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} +$$
$$\overrightarrow{k} \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Ekvationen för sökta planet är: $x + 4y - 7z = 0$.

8. **Geometri i rummet.** Bestäm minimalt avstånd mellan två linjer: en linje given på standart form: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{3}$, och en linje som går genom punkten $(1,1,2)$ och har riktningsvektorn $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. (6p)

Minimalt avstånd mellan två linjer beräknas med hjälp av följande formel:

$s = \dfrac{|(\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_2) \cdot (\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2)|}{|(\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2)|}$ där $\overrightarrow{v}_1$ och $\overrightarrow{v}_2$ är riktningsvektorer av linjer, $\overrightarrow{r}_1$ och $\overrightarrow{r}_2$ är ortsvektorer av två punkter på varje av linjer. För givna linjer

$$\overrightarrow{r}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{r}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}; \overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix};$$

$$(\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_2) \cdot (\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} = -11;$$

$|\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2| = \sqrt{1+25+9} = \sqrt{35};$

$s = \dfrac{11}{\sqrt{35}}.$

Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättats, ta sedan den som känns vara näst lättast o.s.v.

Maxpoäng: 50 ; **3:** 20; **4:** 30; **5:** 40