MATEMATIK	Datum: 2013-08-20	Tid: förmiddag
Chalmers	Inga hjälpmedel.	
A.Heintz	Telefonvakt: Anna Persson,	Tel.: 0703-088304

Mobiltelefoner är förbjudna på tentan.

Lösningar till tenta i TMV036/TMV035 Analys och linjär algebra K/Bt/Kf, del A.

1. **Sats.** Ange ett fullständigt bevis till gränsvärdet $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ **(6p)**

   Titta på beviset i boken.

2. **Gränsvärden.**

   a)Bestäm asymptoter till grafen av följande funktion: $f(x)=\frac{x^2-x+1}{3x+1}$. **(3p)**

   b)Bestäm följande gränsvärde om det finns: $\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{x^2-x+1}{3x+1}\right)/x$. **(3p)**

   Lösning

   a) Lutningen av asymptot då $x\to\pm\infty$ är definierad av gränsvärdet:
   L$=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x+1}{(3x+1)x}=\frac{1}{3}$.

   Position av asymptoten ges av gränsvärdet $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-Lx=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{3x+1}-\frac{1}{3}x\right)=\left(-\frac{1}{3}\right)\lim_{x\to\pm\infty}(3x+1)^{-1}(4x-3)=\frac{-4}{9}$.
   Asymptoten till grafen av funktionen är $y=\frac{-4}{9}+\frac{1}{3}x$.

   b) Funktionen $\sin\left(\frac{x^2-x+1}{3x+1}\right)$ är begränsad för $x\to+\infty$.Detta medför att $\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{x^2-x+1}{3x+1}\right)/x=0$.

3. **Tillämpning av derivator.** Betrakta funktionen:

$$g(x)=\begin{cases} e^x\left(x^2\right), & x<0\\ -e^{-x}\sqrt{x}, & 0\le x\end{cases}$$

   Bestäm punkter där funktionen inte är kontinuerlig, singulära punkter, lokala extrempunkter, absolut maximum och absolut minimum om de finns. **(6p)**

   Bestäm de intervall där funktionen är växande, avtagande, böjningspunkter (inflection points), och de intervall där funktionen är konkav uppåt och konkav neråt. Rita en skiss av grafen till funktionen. **(4p)**

   Lösning

   Funktionen är kontinuerlig för alla reella x.

$$g'(x)=\begin{cases}\frac{d}{dx}\left(e^x\left(x^2\right)\right)=x\left(e^x\right)(x+2), & x<0\\ \frac{d}{dx}\left(-e^{-x}\sqrt{x}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)(2x-1)\left(e^{-x}\right)\frac{1}{\sqrt{x}}, & 0<x\end{cases}$$

   Derivatan existerar inte i origo, som är singulär punkt $x_3=0$.

   Stationära punkter är $x_1=-2$; $x_2=1/2$.

Derivatan $g'(x) > 0$ för $x < -2$; $g'(x) < 0$ för $x > -2$ och $x < 0$.

Derivatan $g'(x) > 0$ för $x > 1/2$; $g'(x) < 0$ för $x < 1/2$ och $x > 0$.

Detta medför att $x_1 = -2$ är lokalt maximum, $x_2 = 1/2$ är ett lokalt maximum.

Punkten $x_3 = 0$ är varken minimum eller maximum, eftersom funktionen är avtegande både åt vänster och åt höger från den punkten.

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$; $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$. Detta medför att x_1 är ett absolut maximum och x_2 är ett absolut minimum.

Funktionen är växande på intervall $(-\infty, -2)$ och $(1/2, +\infty)$.

Funktionen är avtagande på intervall $(-2, 1/2)$.

$$g''(x) = \begin{cases} \frac{d^2}{dx^2}\left(e^x\left(x^2\right)\right) = \left(e^x\right)\left(4x + x^2 + 2\right), & x < 0 \\ \frac{d^2}{dx^2}\left(-e^{-x}\sqrt{x}\right) = \frac{1}{x^{3/2}} e^{-x}\left(\frac{1}{4} + x - x^2\right), & 0 < x \end{cases}$$

Söker rötter till andra derivatan för att hitta böjningspunkter: $4x + x^2 + 2 = 0$: rötter $x_4 = -\sqrt{2} - 2$; $x_5 = \sqrt{2} - 2$.

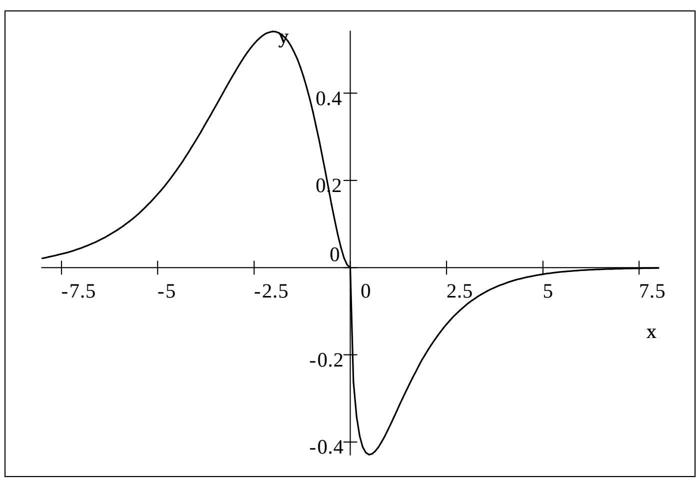
$\frac{1}{4} + x - x^2 = 0$, rötter: $x_6 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$. Andra roten $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ är negativ och hör inte intervallet $x > 0$.

Funktionen har tre böjningspunkter: $x_4 = -\sqrt{2} - 2$; $x_5 = \sqrt{2} - 2$, $x_6 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}$.

Funktionen är konkav uppåt på intervall: $(-\infty, x_4)$, $(x_5, 0)$, $(x_6, +\infty)$.

Funktionen är konkav neråt på intervall: $(0, x_6)$.

Grafen av funktionen:



4. **Linjär approximation.** Betrakta funktionen $f(x) = \tan(x)$ och dess approximation för $x = \pi/3 - 0,1$ som linjär approximation kring $a = \pi/3$. Uppskatta feltermen för den approximationen och ange intervallet där värdet $\tan(\pi/3 - 0,1)$ måste ligga enligt dessa uppskattningar. **(6p)**

Lösning

Linjär approximation $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Feltermen är $E(x) = f(x) - L(x) = \frac{1}{2} f''(z)(x - a)^2$

För givna funktionen $f(a) = \tan(\pi/3) = \sin(\pi/3)/\cos(\pi/3) = (\sqrt{3}/2)/(1/2) = \sqrt{3}$.

$f'(a) = 1/\cos^2(a) = 4.$

$f''(z) = \frac{d^2}{dz^2}\left(\tan(z)\right) = 2\left(\tan z\right)\left(\tan^2 z + 1\right) = 2\frac{\sin(z)}{\cos^3(z)}$

$\mathrm{L}(\pi/3 - 0,1) = \sqrt{3} + (-0.1\cdot 4) = \sqrt{3} - 0.4.$

$E(x) = f(x) - L(x) = \frac{1}{2}f''(z)(x-a)^2 = \frac{1}{2}2\left(\tan z\right)\left(\tan^2(z) + 1\right)(0.1)^2$

$\tan^2(z)$ är växande funktion. Dett medför att

$0 \leq E(x) \leq \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 = \frac{1}{2}2\left(\tan(\pi/3)\right)\left(\tan^2(\pi/3) + 1\right)(0.1)^2 = \sqrt{3}\,(3+1)\,(0.1)^2 = 0.04\sqrt{3}$

Exakt värde av funktionen ligger i intervallet $\sqrt{3} - 0.4 \leq f(\pi/3 - 0.1) \leq \sqrt{3} - 0.4 + 0.04\sqrt{3}$

5. **Gränsvärden och Taylors polynom.**

Beräkna gränsvärdet: $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x) - x}{\cos(x) - 1}\right)$ **(6p)**

Lösning

$\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x) - x}{\cos(x) - 1}\right) = \lim_{x\to 0}\left(x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + O\left(x^4\right) - x\right) / \left(-\dfrac{1}{2}x^2 + O\left(x^4\right)\right) =$
$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + O\left(x^4\right)\right) / \left(-\frac{1}{2}x^2 + O\left(x^4\right)\right) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x + O\left(x^2\right)\right) / \left(-\frac{1}{2} + O\left(x^2\right)\right) = 1.$

6. **Geometri i rummet.** Ange en parametrisk vektroekvation för skärningslinjen mellan två givna plan: $x - 2y + 3z - 4 = 0$ och

$3x + 2y - 5z - 4 = 0.$ **(6p)**

Lösning

Riktningsvektor av linjen kan väljas som vektorprodukt av normaler till planen:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \\ 8 \end{bmatrix}$$

En gemensamm punkt på planen kan väljas med $x = 0$ med att lösa ekvationssystem för y och z:

$-2y + 3z - 4 = 0$; $2y - 5z - 4 = 0$. Eliminera y först med att addera ekvationerna: $-2z - 8 = 0$, $z = -4$.

$2y - 5(-4) - 4 = 0$, $2y = -16$, $y = -8$.

Punkten $P = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}$ ligger på sökta linjen. Riktningsvektorn kan väljas som $V = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Vektorekvationen är $r = P + tV$ med godtycklig parameter t.

7. **Geometri i rummet.** Beräkna volumen av pyramiden som är begränsad av koordinatplanen och planet med ekvationen $2x - 3y + 6z - 12 = 0$. **(6p)**

Lösning

Skriv om ekvationen på formen med sträckor: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ där a,b,c är sträckor som platen skär av koordinataxlar.

$\dfrac{2}{12}x-\dfrac{3}{12}y+\dfrac{6}{12}z=1$, eller $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{-4}+\dfrac{z}{2}=1$.

Vektorer $\begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\-4\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}$ är pyramidens sidor.

Volumen av pyramiden är $1/3$ del av volumen av parallelepipeden byggd på dessa vektorer, d.v.s

$Volum=\frac{1}{3}(6\times 4\times 2)\frac{1}{2}=8.$

eftersom parallepipiden har raka vinklar mellan sidor. Man kan också göra samma beräkning formellt med determinant och observera att

$\left|\det\begin{bmatrix}6&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{bmatrix}\right|=(6\times 4\times 2).$

8. **Vektorer.** Vektorer $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ är vinkelräta mot varandra. $|\overrightarrow{a}|=5$, $\left|\overrightarrow{b}\right|=8$.

Bestäm $\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$ and $\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|$. **(4p)**

Lösning

$\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|^2=\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)=|\overrightarrow{a}|^2+\left|\overrightarrow{b}\right|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}|^2+\left|\overrightarrow{b}\right|^2$

$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|^2=\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)=|\overrightarrow{a}|^2+\left|\overrightarrow{b}\right|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}|^2+\left|\overrightarrow{b}\right|^2$

eftersom $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ är vinkelräta och $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$.

$\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{25+64}=\sqrt{89}.$

Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättats, ta sedan den som känns vara näst lättast o.s.v.

Maxpoäng: 50 ; **3:** 20; **4:** 30; **5:** 40