MATEMATIK | Datum: 2014-01-14 | Tid: förmiddag
Chalmers | Hjälpmedel: inga. Mobiltelefoner är förbjudna.
A.Heintz | Telefonvakt: Christoffer Standar, Tel.: 0703-088304

Lösningar till tenta i TMV036 Analys och linjär algebra K/Bt/Kf, del A.

1. **Sats.** Formulera och bevisa satsen om feluppskattning för linjär approximation.

   Kolla boken. Kap. 4.9, Th. 11, sid. 270. **(6p)**

2. **Gränsvärde och kontinuitet.**

   i) Formulera definitionen av gränsvärde .

   ii) Två funktioner f och g är båda odefinierade i punkten $x = 0$: $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(\frac{1}{x}\right)$ och $g(x) = x\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$:

   Bestäm om någon av dessa funktioner kan utvidgas till punkten $x = 0$, d.v.s. om $f(0)$ eller $g(0)$ kan definieras i punkten $x = 0$, så att funktionen blir vänster kontinuerlig i den punkten. I fall det är möjligt ange hur man kan göra det. **(6p)**

   Lösning.

   Vi måste kolla om vänstergränsvärden finns för dessa funktioner då $x \to 0-$. I fall den finns, så kan funktionen utvidgas till den punkten och bli vänsterkontinuerlig efter utvidgningen.

   $\left|\lim_{x\to 0-}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le \lim_{x\to 0-}\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\exp\left(\frac{1}{x}\right) \le \lim_{x\to 0-}\exp\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to -\infty}\exp(y) = 0$

   Instängnigssatsen (satsen om två polismämnnen) medför att $\lim_{x\to 0-}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

   $\lim_{x\to 0-} x\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0+}(2x\ln(x)) = \lim_{y\to -\infty}(-2y\,e^y) =$

   $\lim_{y\to\infty}\left(\frac{2y}{e^{-y}}\right) = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{2y}{e^{-y}}\right) =$(L'Hopitals regel) $= \lim_{y\to\infty}\left(-\frac{2}{e^{-y}}\right) = 0$:

   Vi fick att båda funktioner har vänstergränsvärde noll i origo och kan då utvidgas till den punkten med värden $f(0) = 0$ och $g(0) = 0$ så att de båda blir vänsterkontinuerliga.

3. **Tillämpning av derivator.** Betrakta funktionen:

   $$g(x) = |x|\exp(-x^2)$$

   Bestäm punkter där funktionen inte är kontinuerlig, singulära punkter, lokala extrempunkter, absolut maximum och absolut minimum om de finns. **(6p)**

   Bestäm de intervall där funktionen är växande, avtagande, böjningspunkter (inflection points), och de intervall där funktionen är konkav uppåt och konkav neråt. Rita en skiss av grafen till funktionen. **(4p)**

   Lösning.

   Funktionen g är jämn: $g(x) = g(-x)$. Det gör att för mest av egenskaper räcker det att undersöka den bara för $x \ge 0$. Alla strukturer för $x < 0$ blir spegelbild av de för $x \ge 0$.

   $\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x\exp(-x^2)\right) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right)$ for $x > 0$

   $\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-x\exp(-x^2)\right) = -\left(e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}\right) = -e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right)$ for $x < 0$

Vi observerar att vänsterderivata i origo är -1 och högerderivata i origo är 1. Funktionen är kontinuerlig i origo

eftersom $\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0-} g(x) = 0$. Men derivatan saknas och origo är en singulär punkt.

Kritiska punkter är $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ och $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Andra derivata saknas i origo, eftersom första derivatan saknas.

$\frac{d^2g}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left(x\exp(-x^2)\right) = 4x^3e^{-x^2} - 6xe^{-x^2} = 2xe^{-x^2}\left(2x^2-3\right)$ för $x > 0$:

$\frac{d^2g}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left(-x\exp(-x^2)\right) = -4x^3e^{-x^2} + 6xe^{-x^2} = 2xe^{-x^2}\left(-2x^2+3\right)$ för $x < 0$:

Nollpunkter för andra derivatan $\frac{d^2g}{dx^2}$ är böjningspunkter (inflection points), där grafen till funktionen ändras från konkav till convex eller tvärtom. Det är punkter $x_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ och $x_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ för g -funktionen.

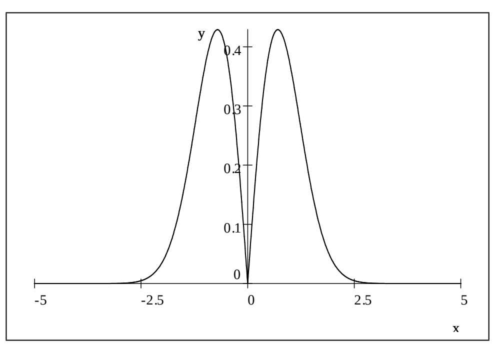
Funktionen har två lokala maxpunkter i x_1 och x_2. Och en lokal minpunkt i origo. Det följer från första derivatans test eftersom derivatan byter tecken från plus till minus i x_1 och x_2 och byter tecken från minus till plus i origo.

$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ och $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ eftersom exp funktionen går mot noll snabbare än vilken som helst polynom. Man kan visa det med hjälp av LHopitals regel för kvoten $\left(\frac{x}{\exp(x^2)}\right)$ för $x > 0$:

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\exp(x^2)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x\exp(x^2)}\right) = 0$. Fallet $x < 0$ visas likadant eller kan använda funktionens symmetri.

Funktionen antar ett globalt maximum $\frac{1}{\sqrt{2}}\exp(-\frac{1}{2})$ i punkterna $x_{1;2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ och har ett globalt minimum i origo lika med noll.

Grafen till funktionen är konkav uppåt för $x \in \left(-\infty; -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $x \in \left(\sqrt{\frac{3}{2}}; \infty\right)$. Den är konkav neråt för $x \in \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}; 0\right)$, $x \in \left(0; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$:Skiss av grafen:



4. **Linjär approximation.** Betrakta funktionen $f(x) = \arcsin(x)$ och dess linjär approximation kring $a = \frac{1}{2}$ för $x = \frac{4}{10}$: Uppskatta feltermen för den approximationen och ange intervallet där värdet $\arcsin(x)$ måste ligga enligt dessa uppskattningar. **(6p)**

Lösning.

Allmänna formler som användes här är:

$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a);$

$E(x) = f(x) - L(x) = \frac{1}{2} f''(s)(x - a)^2$

$\frac{1}{2}(x - a)^2 \min\limits_{s \in [x;a]} (f''(s)) \le E(x) \le \frac{1}{2}(x - a)^2 \max\limits_{s \in [x;a]} (f''(s))$

$a = \frac{1}{2};\ (x - a) = \frac{-1}{10}.$

$f'(x) = \frac{d}{dx}(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$\frac{d^2}{dx^2}(\arcsin(x)) = \left(1 - x^2\right)^{-3=2} x$

$f''(x) \ge 0$ är en växande funktion på intervallet $[x; a]$. Det gör att $\max\limits_{s \in [x;a]} (f''(s)) = f''(a)$

och $0 \le f''(x) \le f''(a)$.

Detta medför att $L(x) \le f(x) \le L(x) + \frac{1}{2}(x - a)^2 f''(a)$

$f(a) = \frac{}{6};$

$f'(a) = \frac{1}{\sqrt{1-0{:}5^2}} = \sqrt{\frac{4}{3}};$

$f''(a) = \left(\frac{4}{3}\right)^{3=2} \frac{1}{2};$

$L(x) = \frac{}{6} - \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{1}{10};$

5. **Gränsvärden.** Beräkna gränsvärdet: $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\tan(x) - x}{x - \sin(x)} \right)$ **(6p)**

   Lösning.

   $$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan(x) - x}{x - \sin(x)} \right) = 2$$

   Kan lösas med l'Hopital metod eller med Taylorutveckling. Visar lösning med l'Hopital och produktregeln.

   $$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan(x) - x}{x - \sin(x)} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\frac{1}{\cos^2(x)} - 1}{1 - \cos(x)} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos^2(x)}{\cos^2(x)\,(1 - \cos(x))} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos^2(x)}{(1 - \cos(x))} \right) =$$
   $$\lim_{x \to 0} (1 + \cos(x)) = 2$$

6. **Geometri i rummet.** Bestäm skärningspunkten av en linje och ett plan.

   Linjen är given av ekvationerna $\dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y + 1}{-2} = \dfrac{z}{6}$.

   Planet är given av ekvationen $2x + 3y + z - 1 = 0$. **(4p)**

   Svar. (2,-3,6)

   Lösning.

   Vi skriver linjen på parametrisk form och söker "tiden" vid vilkn linjen träffar planet. Sedan sätter tidens värde i ekvationen för linjen och får punktens koordinater. Fördelen med den metoden att man löser bara en skalär ekvation istället för system av tre ekvationer för x,y,z koordinater.

Linjen har parametrisk ekvation $\boldsymbol{x} = 1 + \boldsymbol{t}$; $\boldsymbol{y} = -1 - 2\boldsymbol{t}$; $\boldsymbol{z} = 6\boldsymbol{t}$ eller $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} +$ $\boldsymbol{t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$**:**Vi sätter uttryck för $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$,$\boldsymbol{z}$ i planets ekvation och får en skalär ekvation för "tiden" $\boldsymbol{t}$.

$2(1 + \boldsymbol{t}) + 3(-1 - 2\boldsymbol{t}) + 6\boldsymbol{t} - 1 = 0$

$2\boldsymbol{t} - 2 = 0$**:**Ekvationen ger "träfftiden" $\boldsymbol{t} = 1$ och efter insättning i linjensekvation - svaret till problemet:

$\boldsymbol{x} = 2$; $\boldsymbol{y} = -3$; $\boldsymbol{z} = 6$.

7. **Geometri i rummet.** Bestäm kortaste avståndet mellan linjer med ekvationer:

   $\frac{\boldsymbol{x}+5}{3} = \frac{\boldsymbol{y}+5}{2} = \frac{\boldsymbol{z}-1}{-2}$ och

   $\boldsymbol{x} = 6\boldsymbol{t} + 9$**;** $\boldsymbol{y} = -2\boldsymbol{t}$**;** $\boldsymbol{z} = -\boldsymbol{t} + 2$. **(6p)**

   Lösning.

   Allmän formel för avståndet för två linjer med vektorekvationer $\overrightarrow{\boldsymbol{r}} = \overrightarrow{\boldsymbol{P}} + \boldsymbol{t}\overrightarrow{\boldsymbol{V}}_1$ och $\overrightarrow{\boldsymbol{r}} = \overrightarrow{\boldsymbol{Q}} + \boldsymbol{t}\overrightarrow{\boldsymbol{V}}_2$ är:

   $$\boldsymbol{A} = \frac{\left|\left(\overrightarrow{\boldsymbol{V}}_1 \times \overrightarrow{\boldsymbol{V}}_2\right) \cdot \left(\overrightarrow{\boldsymbol{P}} - \overrightarrow{\boldsymbol{Q}}\right)\right|}{\left|\left(\overrightarrow{\boldsymbol{V}}_1 \times \overrightarrow{\boldsymbol{V}}_2\right)\right|}$$

   För givna linjer $\overrightarrow{\boldsymbol{V}}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$; $\overrightarrow{\boldsymbol{V}}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$; $\overrightarrow{\boldsymbol{P}} = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$; $\overrightarrow{\boldsymbol{Q}} = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

   $\left(\overrightarrow{\boldsymbol{V}}_1 \times \overrightarrow{\boldsymbol{V}}_2\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -9 \\ -18 \end{bmatrix}$; $\left|\left(\overrightarrow{\boldsymbol{V}}_1 \times \overrightarrow{\boldsymbol{V}}_2\right)\right| = \sqrt{6^2 + 9^2 + 18^2} = 21$

   $\left(\overrightarrow{\boldsymbol{P}} - \overrightarrow{\boldsymbol{Q}}\right) = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$;

   $\left(\overrightarrow{\boldsymbol{V}}_1 \times \overrightarrow{\boldsymbol{V}}_2\right) \cdot \left(\overrightarrow{\boldsymbol{P}} - \overrightarrow{\boldsymbol{Q}}\right) = \begin{bmatrix} -6 \\ -9 \\ -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$

   $\boldsymbol{A} = \frac{\left|\left(\overrightarrow{\boldsymbol{V}}_1 \times \overrightarrow{\boldsymbol{V}}_2\right) \cdot \left(\overrightarrow{\boldsymbol{P}} - \overrightarrow{\boldsymbol{Q}}\right)\right|}{\left|\left(\overrightarrow{\boldsymbol{V}}_1 \times \overrightarrow{\boldsymbol{V}}_2\right)\right|} = \frac{21}{3} = 7$**:**

8. **Vektorer.** Bestäm endpunkterna $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ av en sträcka $\boldsymbol{AB}$ sådan att punkterna

   $\boldsymbol{C} = (2; 0; 2)$ och $\boldsymbol{D} = (5; -2; 0)$ delar $\boldsymbol{AB}$ i tre lika långa sträckor **(6p)**

Lösning.

Punkterna $\boldsymbol{A; C; D; B}$ ligger längs samma sträcka och avståndet mellan $\boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{CD}$ och $\boldsymbol{DB}$ är samma.

Det gör att vektorer $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$ och $\overrightarrow{\boldsymbol{DB}}$ är likadana vektorer:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = \overrightarrow{\boldsymbol{CD}} = \overrightarrow{\boldsymbol{DB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{D}} - \overrightarrow{\boldsymbol{C}} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Detta medför att $\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \overrightarrow{\boldsymbol{C}} - \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$ och $\overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{D}} + \overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}; \ \overrightarrow{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Tips: Börja lösa uppgifter från den som verkar vara lättats, ta sedan den som känns vara näst lättast o.s.v.

Maxpoäng: 50 ; **3:** 20; **4:** 30; **5:** 40