TMV036a – Analys och Linjär Algebra A

Satser med bevis 2010

Sammanställt av: David Frisk, 2013

David Frisk

Bevis ALA-A 2010

1. Gränsvärde av summa , s. 89. Th. 1:2 s68
2. Derivata av produkt , s. 109. Th. 2:3 s. 109
3. Derivata av invers funktion s.168 (Anteckningar)
4. Gränsvärde $\sin(x)/x$, $x \to 0$ s.120 Th. 2:8
5. Rolle's sats s.140 Th 2:15
6. Feluppskattning för linjär approximation s. 269 Th 4:11
7. Gränsvärde $(1+\frac{1}{n})^n$, $n \to +\infty$ s. 186 Th. 3:6

1 Gränsvärde av summa

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ och $\lim_{x \to a} g(x) = M$

Visa att: $\lim_{x \to a} (f(x)+g(x)) = L + M$

Låt $\epsilon > 0$ vara givet. Vi vill hitta ett positivt tal δ så att:

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |(f(x)+g(x)) - (L+M)| < \epsilon$$

Observera att: $|(f(x)+g(x)) - (L+M)| = |(f(x)-L) + (g(x)-M)|$

Triangelolikheten $|a+b| \leq |a| + |b|$ ger:

$$\leq |f(x)-L| + |g(x)-M|$$

Eftersom $\lim_{x \to a} f(x) = L$ och $\epsilon/2 > 0$, finns $\delta_1 > 0$ så att

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon/2$$

Samma med $g(x)$, $\lim_{x \to a} g(x) = M$, finns $\delta_2 > 0$ så att

$$0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)-M| < \epsilon/2$$

Låt δ vara det minsta av $(\delta_1; \delta_2)$. Om $0 < |x-a| < \delta$

så är $|x-a| < \delta_1$ så $|f(x)-L| < \epsilon/2$ och

$|x-a| < \delta_2$ så $|g(x)-M| < \epsilon/2$

Därför är: $|(f(x)+g(x)) - (L+M)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

Detta visar att $\lim_{x \to a} (f(x)+g(x)) = L + M$

David Frisk

2. Derivata av produkt

f och g är två funktioner, deriverbara i x.

Visa att: $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Derivatans definition ger:

$$(fg)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(g(x+h) \cdot \underbrace{\frac{(f(x+h) - f(x))}{h}}_{= f'(x)} + f(x) \cdot \underbrace{\frac{(g(x+h) - g(x))}{h}}_{= g'(x)} \right) =$$

g är kontinuerlig i x eftersom g har derivata i x.

Detta medför att $g(x+h) \xrightarrow[h \to 0]{} g(x)$

$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

---

3. Derivata av invers funktion

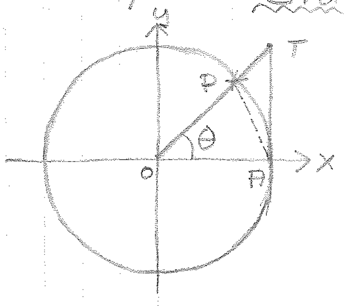
f är en funktion deriverbar i x.

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d(f^{-1})}{dx} = 1$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

4 Gränsvärdet $\lim_{x \to 0} \left(\sin(x)/x \right)$



x) Arean ◺ OAP

x) Arean △ OAP

x) Arean △ OAT

Vi observerar:

$$\text{Arean } \triangle\, OAP \leq \text{Arean } ◺\, OAP \leq \text{Arean } \triangle\, OAT$$

$$\frac{\sin\theta}{2} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\tan\theta}{2}$$

$\times \frac{2}{\sin\theta}$ ger

$$1 \leq \frac{\theta}{\sin\theta} \leq \frac{1}{\cos\theta}$$

$$1 \geq \frac{\sin\theta}{\theta} \geq \cos\theta$$

$$\cos\theta \xrightarrow[\theta \to 0]{} 1 \Rightarrow \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

---

5 Rolles sats

g är en funktion kontinuerlig på $[a,b]$, deriverbar på (a,b). Om $g(a) = g(b)$,

Visa att: Det finns en punkt $c \in (a,b)$ där $g'(c) = 0$

1) Om $g(x) = g(a)$ för alla x i $[a,b]$, så är g en konstant funktion med lutning 0 – bevisat!

2) Det finns en punkt x så att $g(x) \neq g(a)$

Antag att $g(x) > g(a)$.

Enligt max-min teoremet, eftersom g är kontinuerlig på $[a,b]$ måste g ha ett maximum i punkten c i $[a,b]$

Eftersom $g(c) \geq g(x) > g(a) = g(b)$, kan c ej vara a eller b.

Därför ligger c i det öppna intervallet (a,b), så g är deriverbar i c. Eftersom g har ett max i c, är c en kritisk punkt till g: $g'(c) = 0$.

6. Feluppskattning för linjär approximation

Om $f''(t)$ existerar för alla t i ett intervall innehållandes a och x.

Visa att Det finns en punkt s mellan a och x så att felet $E(x) = f(x) - L(x)$ i den linjära approximationen $f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ uppfyller:

$$E(x) = \frac{f''(s)}{2}(x-a)^2, \quad s \text{ är okänt.}$$

Bevis:

$$E'(x) = f'(x) - f'(a), \qquad E(a) = 0$$

Betrakta $\frac{E(x)}{(x-a)^2} = \frac{E(x) - \overbrace{E(a)}^{=0}}{(x-a)^2 - (a-a)^2}$

Medelvärdessatsen ger:

$\exists\, u \in (x, a)$ där lutningen är:

$$\frac{E'(u) - E'(a)}{2(u-a) - 2(a-a)} = E''(s)$$

Mvs: $\exists s$ mellan u och a så att

$$\frac{E'(u) - E'(a)}{(u-a)} = E''(s) \Rightarrow E(x) = \frac{1}{2} f''(s)$$

× Slutsats A: Om $f''(x) > 0$ mellan x och a, då är

$$L(x) < f(x)$$

× Slutsats B: Om $f''(x) \leq K$

$$L(x) - \frac{1}{2}K(x-a)^2 < f(x) \leq L(x) + \frac{K(x-a)^2}{2}$$

× Slutsats C: Om $M \leq f''(x) \leq N$ mellan x och a;

$$L(x) + \frac{M(x-a)^2}{2} \leq f(x) \leq L(x) + \frac{N(x-a)^2}{2}$$

Om M och N har samma tecken får man en bättre approximation:

$$f(x) \approx L(x) + \frac{M+N}{4}(x-a)^2,$$

Där felet är mindre än halva längden av intervallet.

7. Gränsvärdet $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ n \to +\infty$

Visa att: $e = \lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Om $n=0$ behövs inget bevis, men om $n \neq 0$:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n} = \lim_{n \to \dots} \frac{\ln(1+h)}{h} = , \quad h = \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = (\ln t)' \Big|_{t=1}$$

$$= \frac{1}{t}\Big|_{t=1} = 1$$

ln är deriverbar, och därför kontinuerlig.

$$\ln\left(\lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \lim_{n \to +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1$$

, Ta exponenten av båda sidor:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^1 = e$$