MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

2008-03-29, kl. 14.00 - 18.00

TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B

Telefonvakt: Peter Lindroth, telefon: 0762 - 721860
Inga hjälpmedel (utom medföljande formelblad). Kalkylator ej tillåten.

Uppgifterna 1–5 (totalt 18 poäng) är korta frågor på det grundläggande materialet och du behöver endast ge kortfattade lösningar och svar.

På uppgifterna 6–10 (totalt 32 poäng) skall du ge fullständiga lösningar. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

Lösningar anslås på MV första arbetsdagen efter tentamenstillfället.
Resultat meddelas via epost från LADOK.

---

1. Beräkna $\int \cos\sqrt{x}\, dx$ (4p)

2. Den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har standardmatrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. (4p)

Bestäm volymen av $T(S)$ om S är en parallellepiped med volymen 1.

3. Lös matrisekvationen (3p)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y'(t) + 2t\,y(t) = 2t \\ y(0) = 2. \end{cases}$ (3p)

5. Lös ekvationssystemet (4p)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 \phantom{{}+x_3} = 3 \end{cases}$$

genom att ange den utökade koefficientmatrisen och sedan radreducera till trappstegsform.

Till uppgifterna 6–10 skall du lämna in fullständiga lösningar.

6. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$ (6p)

7. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området $0 \le y \le e^{-x^2}$ roterar kring y-axeln. (6p)

Vänd!

8. Beräkna gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} n^2 \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^3}$. (6p)

9. (a) Ange definitionen för att en avbildning $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är linjär. (6p)

(b) Visa att en matrisavbildning $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$, där A är en $m \times n$ matris, är linjär.

10. (a) Beskriv lösningarna (tre fall) till en andra ordningens homogen linjär differentialekvation med reella koefficienter: $y'' + ay' + by = 0$ (8p)

(b) Ge ett bevis i fallet då den karakteristiska ekvationen: $r^2 + ar + b = 0$ har en dubbelrot.

Lösningar: AlaB, TMV035, 2008-03-29

1. $\int \cos\sqrt{x}\,dx = \left[\begin{matrix} t=\sqrt{x} \\ x=t^2,\ dx = 2t\,dt\end{matrix}\right] = \int 2t\cos t\,dt$

$= 2t\sin t - \int 2\sin t\,dt = 2t\sin t + 2\cos t + C$

$= 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C.$

2. Volymen är $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & -2 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$

$= 1\cdot 2\cdot 3 = 6.$

3. $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$

4. Integrerande faktor är $e^{\int 2t\,dt} = e^{t^2}$

$(y e^{t^2})' = 2t e^{t^2}$

$y e^{t^2} = \int 2t e^{t^2}\,dt = e^{t^2} + C$

$y = 1 + Ce^{-t^2}$

$2 = y(0) = 1 + C, \quad C = 1.$

Svar: $y = 1 + e^{-t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$

5. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3/2 \\ x_3 = -1/2 \end{cases}$ $x_2 = t$ är en fri variabel.

$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$

6. Karakteristisk ekvation är

$r^2 + 4r + 5 = 0$

$r = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm i$

Allmän homogen lösning till $y'' + 5y' + 5y = e^{-2x}$ är $y_h = e^{-2x}(A\cos x + B\sin x)$

Som partikulärlösning ansätter vi $y_p = Ce^{-2x}$

$y_p' = -2Ce^{-2x}, \quad y_p'' = 4Ce^{-2x}$

Dvs $y_p'' + 4y_p' + 5y_p = (4C - 8C + 5C)e^{-2x} = C\cdot e^{-2x}$

$= e^{-2x}$

Dvs $C = 1$ och $y_p = e^{-2x}.$

Den allmänna lösningen ges av

$y = y_h + y_p = (A\cos x + B\sin x + 1)e^{-2x}$

Begynnelsevillkoren ger

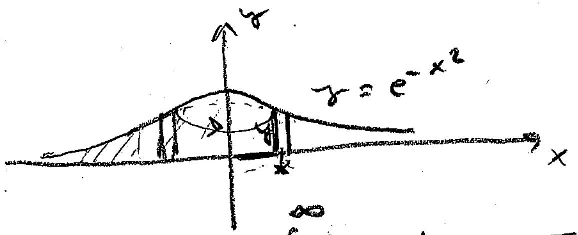
$0 = y(0) = A + 1, \quad A = -1$

$y' = (-A\sin x + B\cos x)e^{-2x} - 2(A\cos x + B\sin x + 1)e^{-2x}$

$0 = y'(0) = B - 2A - 2 = B + 2 - 2 = B.$

Dvs $y = (1 - \cos x)e^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$

7.



Volymen är $\int_0^\infty 2\pi x y\,dx = \pi \int_0^\infty 2x e^{-x^2}\,dx$

$= \pi \left[-e^{-x^2}\right]_0^\infty = \pi \left(\lim_{x\to\infty} -e^{-x^2} + e^0 \right)$

$= \pi (0 + 1) = \underline{\underline{\pi}}.$

8. $\lim_{n\to\infty} n^2 \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^3} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{(k/n)^3} \cdot \frac{1}{n} = \begin{bmatrix} l = k-n \\ k = l+n \end{bmatrix}$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{(\frac{l}{n}+1)^3} \cdot \frac{1}{n} = \Bigg[$ Riemannsumma för $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$ över intervallet $0 \le x \le 1$. $(x_l = \frac{l}{n})$ $\Bigg]$

$= \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^3}\,dx = \left[\frac{-1}{2(x+1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$