MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

2008-12-17, kl. 08.30 - 12.30

TMV036 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B

Telefonvakt: Richard Lärkäng, telefon: 0762 - 721860
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgifterna 1–5 (totalt 17 poäng) är korta frågor på det grundläggande materialet och du behöver endast ge kortfattade lösningar och svar.

På uppgifterna 6–10 (totalt 33 poäng) skall du ge fullständiga lösningar. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser (inklusive bonuspoäng): 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

Lösningar anslås på kursens hemsida och på MV första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

---

1. Bestäm inversen till matrisen $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. (3p)

2. Bestäm argumentet för $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$. (3p)

3. Bestäm en bas för nollrummet till matrisen $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (4p)

4. Lös begynnelsevärdesproblemet (3p)

$$\begin{cases} y' + \dfrac{1}{x+1} y = 6x, \; x > -1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

5. Bestäm, med hjälp av Cramers regel, x_3 i följande ekvationssystem (4p)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = -1 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Till uppgifterna 6–10 skall du lämna in fullständiga lösningar.

6. Lös begynnelsevärdesproblemet (7p)

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2x \cdot e^{2x}, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

7. Beräkna integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}(x+1)}\,dx$. (6p)

Vänd!

8. För givet $t > 0$ definieras funktionen $f(t)$ som arean av området (7p)

$$0 \le y \le e^{-x^2}, \quad t \le x \le 3t$$

Bestäm det värde på t då arean är som störst, dvs då f antar sitt största värde.

9. (a) Formulera medelvärdessatsen för integraler. (2p)

(b) Använd detta för att visa (4p)

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^{x+2} \arctan(t)\,dt = \pi$$

10. (a) Definiera begreppet linjär avbildning. (3p)
Avgör också vilka av följande avbildningar som är linjära

i. $T(\mathrm{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

ii. $T(\mathrm{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{bmatrix}$

iii. $T(x) = 2x + 1$

(b) Formulera och bevisa en sats om standardmatrisen för en linjär avbildning. (4p)

Lösningar ALA B, TMV036 2008-12-17 (1

1.
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] (-2)(-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] (3)(-1)$$

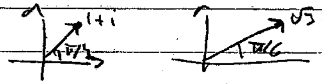
3p

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 1 & 3 \end{array}\right] (1)(-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & -3 \end{array}\right] (1)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & -3 \end{array}\right] \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ok.}$$

2. $\arg(1+i) = \pi/4$

$\arg(\sqrt{3}+i) = \pi/6$



7p

$\arg((1+i)/(\sqrt{3}+i)) = \pi/4 - \pi/6 = \pi/12$

3.
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} (3)(1) \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} (\tfrac{1}{5})(\tfrac{1}{2}) \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} (-1)(-2)$$

4p

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$x_3 = -s$, $x_4 = t$, $x_2 = 2s - t$, $x_1 = s + t$

$$\vec{x} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Svar: En bas för Nul(A) är $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. $y' + \frac{1}{x+1} y = 6x$, $x > -1$ integr. faktor $e^{\int \frac{1}{x+1} dx} = e^{\ln(x+1)} = x+1$ 3p

$((x+1)y)' = 6x(x+1) = 6x^2 + 6x$

$(x+1)y = 2x^3 + 3x^2 + C$

$1 \cdot y(0) = C$, $C = 1$

Svar: $y(x) = \dfrac{2x^3+3x^2+1}{x+1}$

5.
$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{17}{18}$$

4p

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} (-2)(1) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 3 = 17$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} (-2)(1) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 2 = 18$$

Svar: $x_3 = 17/18$

6. $y'' - 3y' + 2y = 2x e^{2x}$, $p(r) = r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2)$ 7p

Sätt $y = z \cdot e^{2x}$.

$p(D)y = p(D) z e^{2x} = e^{2x} p(D+2) z = e^{2x} (D+1)D z = e^{2x}(z'' + z')$
$= 2x e^{2x}$

$z'' + z' = 2x$, karakt. ekv. $r^2 + r = 0$, $r_1 = -1$, $r_2 = 0$

Homogen lösning $z_h = C_1 e^{-x} + C_2$

Ansatz $z_p = Ax^2 + Bx$, där $z_p'' + z_p' = 2A + 2Ax + B = 2x$

$z_p' = 2Ax + B$ dvs $A = 1$, $B = -2A = -2$

$z_p'' = 2A$

$\therefore$ $z(x) = z_h(x) + z_p(x) = C_1 e^{-x} + x^2 - 2x + C_2$

$y(x) = z(x) e^{2x} = C_1 e^{x} + (x^2 - 2x + C_2) e^{2x}$

$y(0) = C_1 + C_2 = 0$, $C_2 = -C_1$

$y' = C_1 e^{x} + (2x-2)e^{2x} + 2(x^2 - 2x + C_2)e^{2x}$

$y'(0) = C_1 - 2 + 2C_2 = -C_1 - 2 = 0$, $C_1 = -2$, $C_2 = 2$

Svar: $y(x) = -2e^{x} + (x^2 - 2x + 2)e^{2x}$

7. $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}(x+1)}\,dx = \left[\begin{array}{ll} t=\sqrt{x}, & x\to\infty \Rightarrow t\to\infty \\ x=t^2, & x=1 \Rightarrow t=1 \\ dx=2t\,dt & \end{array}\right]$ 6p

$= \int_1^\infty \frac{2\cancel{t}}{t^2\cancel{t}(t^2+1)}\,dt = \int_1^\infty \frac{2}{t^2(t^2+1)}\,dt \overset{*}{=}$

$\overset{*}{=} \int_1^\infty \left(\frac{2}{t^2} - \frac{2}{t^2+1}\right)dt = \left[-\frac{2}{t} - 2\arctan t\right]_1^\infty =$

$= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{2}{t} - 2\arctan t\right) + \frac{2}{1} + 2\arctan 1 = 0 - 2\cdot\frac{\pi}{2} + 2 + 2\frac{\pi}{4} = \underline{\underline{2-\frac{\pi}{2}}}$

(*)

$\frac{2}{t^2(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Ct+D}{t^2+1}$

$2 = A(t^3+t) + B(t^2+1) + (Ct+D)t^2 = t^3\cdot C + t^2(A+B+D) + t\cdot A + B$

$\underline{\underline{B=2}}$, $\underline{\underline{A=0}}$, $A+B+D=0$, $\underline{\underline{C=0}}$, $\underline{\underline{D=-2}}$.

8. $f(t) = \int_t^{3t} e^{-x^2}\,dx$, $t>0$. 7p

Låt $G(x)$ vara en primitiv funktion till e^{-x^2}.

$f(t) = [\text{enl H.S.}] = [G(x)]_t^{3t} = G(3t) - G(t)$

$f'(t) = 3\cdot G'(3t) - G'(t) = 3e^{-9t^2} - e^{-t^2}$

$= e^{-t^2}(3e^{-8t^2} - 1)$

f antar sitt största värde i en punkt t_0 där $f'(t_0)=0$.

$f'(t)=0 \iff 3e^{-8t^2} - 1 = 0$, $e^{-8t^2} = 1/3$, $-8t^2 = -\ln 3$

$t_0 = \sqrt{\frac{\ln 3}{8}}$, för $t<t_0$ är $f'(t)>0$, för $t>t_0$ är $f'(t)<0$

Dvs f antar sitt maximum i $t=t_0$

Svar: Arean är som störst då $t=\sqrt{(\ln 3)/8}$

9. b) Enligt MVS för integraler så finns ett tal ξ mellan x och $x+2$ s.a.

$\int_x^{x+2} \arctan t\,dt = (x+2-x)\cdot\arctan(\xi)$

$= 2\cdot\arctan(\xi)$

dvs $\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+2}\arctan t\,dt = 2\cdot\lim_{x\to\infty}\arctan(\xi) = \left[\begin{array}{l}\xi\to\infty \\ \text{då } x\to\infty\end{array}\right]$

$= 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$.

10 a)

i) $T(\vec{x})$ är linjär ty T är en matrisavbildning.

ii) $T(\vec{x})$ är ej linjär ty $T(\vec{0}) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \neq \vec{0}$

iii) $T(x) = 2x+1$ är ej linjär ty $T(0) = 1 \neq 0$

En linjär avbildning avbildar nollvektorn på nollvektorn.