MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen
2009-08-24, kl. 08.30 - 12.30

TMV036/TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B

Telefonvakt: David Witt-Nyström, telefon: 0762 - 721861
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgifterna 1–4 (totalt 18 poäng) är korta frågor på det grundläggande materialet och du behöver endast ge kortfattade lösningar och svar.

På uppgifterna 5–9 (totalt 32 poäng) skall du ge fullständiga lösningar. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

Lösningar anslås på MV första arbetsdagen efter tentamenstillfället.
Resultat meddelas via epost från LADOK.

---

1. (a) Bestäm inversen till $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$. (3p)

(b) Kontrollera att du räknat rätt genom att beräkna AA^{-1}. (1p)

2. Beräkna $\dfrac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}+i)^3}$. (3p)

3. Lös ekvationssystemet nedan. (Skriv upp dess utökade matris och reducera till trappstegsform.) (4p)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= -2 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 4 \end{cases}$$

4. Beräkna integralerna

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \tan x dx$ (3p)

(b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2x}{1+x^4}\,dx.$ (4p)

Till uppgifterna 5–9 skall du lämna in fullständiga lösningar.

5. Lös begynnelsevärdesproblemet (7p)

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = (30x - 71)e^{-4x}, \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

6. Bestäm arean av den yta som uppstår då kurvan $y = \dfrac{x\sqrt{x}}{3} - \sqrt{x}$, $0 \le x \le 3$, roterar kring y-axeln. (6p)

Vänd!

7. Låt $y(x)$ vara lösningen till begynnelsevärdesproblemet (7p)

$$xy'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1.$$

Bestäm de fyra första koefficienterna i taylorutvecklingen av y:
$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$
Ledning: Sök efter ett så kallat rekursivt samband mellan koefficienterna (a_{n+1} uttrycks i temer av de tidigare koefficienterna) genom att sätta in utvecklingen i differentialekvationen. Vad är a_0 och a_1?

8. (a) Definiera begreppet linjär avbildning. (2p)
Avgör också vilka av följande avbildningar som är linjära

i. $T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{bmatrix}$

ii. $T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

(b) Visa att om $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning så finns en matris A sådan att $T(x) = Ax$, för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. (Dvs. varje linjär avbildning är en matrisavbildning.) (4p)

9. Formulera och bevisa medelvärdessatsen för integraler. (6p)

Lösningar ALA B, TMV036, 2009-08-24.

1.
a)
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] (-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} (-5)\,(-1) \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 17 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} (-8) \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 3 & -8 \end{bmatrix} (-2)\,(3) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 27 & 10 & -24 \\ 0 & 1 & 0 & -19 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 3 & -8 \end{bmatrix} (2) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -19 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 3 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} -11 & -4 & 10 \\ -19 & -7 & 17 \\ 9 & 3 & -8 \end{matrix}}_{=A^{-1}}$$

b)
$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -11 & -4 & 10 \\ -19 & -7 & 17 \\ 9 & 3 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -55+38+18 & -20+14+6 & 50-34-16 \\ -11+38-27 & -4+14-9 & 10-34+24 \\ -66+57+9 & -24+21+3 & 60-51-8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ok.}$$

2.
$$\frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}+i)^3} = \frac{(\sqrt{2}\,e^{i\pi/4})^4}{(2e^{i\pi/3})^3} = \frac{2\,e^{i\pi}}{8\,e^{i\pi}} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

3.
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} (-1)\,(-3) \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (2)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dvs $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_4 = -1 \end{cases}$ $\quad x_3 = s$, $x_4 = t$ fria variabler

__Svar.__
$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

4
a)
$$\int_0^{\pi/3} \tan x\,dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \left[\begin{matrix} t = \cos x & \frac{\pi}{3} \to \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ dt = -\sin x\,dx & 0 \to \cos 0 = 1 \end{matrix}\right.$$

$$= \int_1^{1/2} \frac{-dt}{t} = \int_{1/2}^{1} \frac{dt}{t} = \Big[\ln t\Big]_{1/2}^{1} = \ln 1 - \ln\frac{1}{2} = \underline{\underline{\ln 2}}$$

b)
$$\int_1^{\infty} \frac{2x}{1+x^4}\,dx = \left[\begin{matrix} t = x^2 & x \to \infty \to t \to \infty \\ dt = 2x\,dx & x = 1 \to t = 1 \end{matrix}\right] =$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \Big[\arctan t\Big]_1^{\infty} = \lim_{t\to\infty} \arctan t - \text{arcta}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$

---

5. Karakteristisk ekvation är $r^2 - 3r + 2 = 0$, $r = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}$
$= \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} = \{$

Den allmänna homogena lösningen är
$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Vi ansätter partikulärlösningen $y_p = (Ax+B)e^{-4x}$

$y_p' = (-4Ax - 4B + A)e^{-4x}$, $\quad y_p'' = (16Ax + 16B - 8A)e^{-4x}$

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = (16Ax + 16B - 8A + 12Ax + 12B - 3A + 2Ax + 2B)e^{-4x}$$
$$= (30Ax + 30B - 11A)e^{-4x}$$
$$= (30x - 71)e^{-4x}$$

Detta ger $30A = 30$, $30B - 11A = -71$.

$A = 1$, $30B = -71 + 11 = -60$, $B = -2$.

Dvs $y_p = (x-2)e^{-4x}$.

Allmän lösning är $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + (x-2)e^{-4x}$

$y(0) = c_1 + c_2 - 2 = 2$, $\quad c_1 + c_2 = 4$, $\quad c_1 = 4 - c_2$

$y'(x) = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} + (-4x+9)e^{-4x}$

$y'(0) = c_1 + 2c_2 + 9 = 0$, $\quad c_2 = -13$, $c_1 = 17$

__Svar:__ $y(x) = 17e^x - 13e^{2x} + (x-2)e^{-4x}$

6. Arean ges av $A = \int_0^3 2\pi x \sqrt{1+(y')^2}\,dx$

$$y = \frac{x^{3/2}}{3} - x^{1/2}, \quad y' = \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$1+(y')^2 = 1 + \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 = 1 + \frac{x}{4} + \frac{1}{4x} - 2\cdot\frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{1}{4x} = \frac{x^2+2x+1}{4x} = \frac{(x+1)^2}{4x}$$

Dvs $2\pi x\sqrt{1+(y')^2} = 2\pi x \, \frac{x+1}{2\sqrt{x}} = \pi(x\sqrt{x} + \sqrt{x})$

$$A = \pi \int_0^3 (x^{3/2} + x^{1/2})\,dx = \pi\left[\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^3$$

$$= \pi\left(\frac{18}{5}\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\right) = \underline{\underline{\frac{28\sqrt{3}}{5}\pi}}$$

7. $y(0) = a_0 = 0$,

$$y(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots$$

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$$

$$y''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + (n+1)n\,a_{n+1}x^{n-1} + \dots$$

$$y'(0) = a_1 = 1.$$

$$xy'' + y = (2a_2 + a_1)x + (6a_3 + a_2)x^2 + \dots + ((n+1)n\,a_{n+1} + a_n)x^n + \dots$$

$$= 0$$

Dvs $2a_2 + a_1 = 0$, $6a_3 + a_2 = 0$, $(12a_4 + a_3 = 0)$

$(n+1)n\,a_{n+1} + a_n = 0$, $a_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)n}a_n$

Dvs $a_2 = -\frac{1}{2\cdot 1}a_1 = -\frac{1}{2}$ ($a_1 = 1$ se ovan)

$$a_3 = -\frac{1}{3\cdot 2}a_2 = -\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}$$

$$a_4 = -\frac{1}{4\cdot 3}a_3 = -\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12} = -\frac{1}{144}$$

Svar: $y(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{144}x^4 + \dots$