LÖSNINGSFÖRSLAG
till tenta 16 dec 2010

TMV036/TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B

---

1. Bestäm standardmatrisen för den linjära avbildning $\mathbf{T}$ från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som motsvarar spegling i linjen $y = x$, av punkter i xy-planet. (t.ex. gäller att $\mathbf{T}(1,1) = (1,1)$ och $\mathbf{T}(-1,1) = (1,-1)$) (4p)

Lösning: Från beskrivningen av $\mathbf{T}$ följer speciellt att $\mathbf{T}(1,0) = (0,1)$ och att $\mathbf{T}(0,1) = (1,0)$, så standardmatrisen för avbildningen är $A = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(\mathbf{e}_1) & \mathbf{T}(\mathbf{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Alternativ lösning: Vi kan också erhålla standardmatrisen med hjälp av villkoren $\mathbf{T}(1,1) = (1,1)$ och $\mathbf{T}(-1,1) = (1,-1)$. Om $\mathbf{T}$ har standardmatrisen $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ så gäller alltså att;

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{C} \quad \Rightarrow$$

$$A = CB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Svar: Standardmatrisen för avbildningen $\mathbf{T}$ är $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. Följande ekvationssystem har en entydig lösning x, y, z

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ -x + 2z = 2 \\ 3x + y + 3z = -2 \end{cases}$$

Använd Cramer's regel för att bestämma y i denna lösning. (4p)

Lösning: Ekvationssystemet kan skrivas $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Cramers regel ger då att;

$$y = \frac{det(A_2(\mathbf{b}))}{det(A)} = \frac{52}{4} = 13 \quad \text{ty}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 9 - 5 = 4 \quad \text{och}$$

$$det(A_2(\mathbf{b})) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 20+36-4 = 52$$

Svar: $y = 13$

3. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} x^2y'(x) - xy(x) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$ (5p)

Lösning: Differentialekvationen är linjär av första ordningen och kan skrivas;

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$$

En integrerande faktor är; $e^{\int \frac{-1}{x}\,dx} = e^{-\ln x} = 1/x$. Multiplicerar vi båda led i ekvationen ovan med denna integrerande faktor så får vi;

$$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x^3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\,y\right) = \frac{1}{x^3} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x}\,y = \int \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{-1}{2x^2} + C \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{-1}{2x} + Cx$$

Begynnelsevillkoret $y(1) = 0$ ger sedan att $C = 1/2$ så;

Svar: $y(x) = \frac{-1}{2x} + \frac{x}{2} \quad \left(= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2-1}{2x}\right)$

4. Beräkna $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3+x}\,dx$ (6p)

Lösning:

$$\int \frac{x^3+1}{x^3+x}\,dx = \int \left(1 + \frac{1-x}{x(x^2+1)}\right)dx = \int \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \arctan x + C$$

Svar: $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3+x}\,dx = x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \arctan x + C$

5. (a) Bestäm alla lösningar till den homogena differentialekvationen $y^{(4)} + y = 0$ (3p)

(b) Bestäm en partikulärlösning till differentialekvationen $y^{(4)} + y = x^4 + x$ (2p)

(c) Hur kan man, med hjälp av lösningarna från deluppgift (a) och (b), erhålla alla lösningar till differentialekvationen $y^{(4)} + y = x^4 + x$ (1p)

Lösning:

(a) Den karakteristiska ekvationen $r^4 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^4 = -1$ är en binomisk ekvation och kan lösas genom att skriva båda led på polär form. Om vi ansätter $r = Re^{i\theta}$ så följer det av bl.a. de Moivres formel att $r^4 = \left(Re^{i\theta}\right)^4 = R^4e^{i4\theta}$. Vidare är $-1 = e^{i\pi}$ så den binomiska ekvationen kan skrivas

$$R^4e^{i4\theta} = e^{i\pi}$$

Identifierar vi belopp och argument av båda sidor så får vi att

$$\begin{cases} R^4 = 1 \\ 4\theta = \pi + k\cdot 2\pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} R = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Så lösningarna till den karakteristiska ekvationen är $r_k = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$
Av känd sats från kursen följer därför att homogenlösningarna har formen

Svar: $y_h(x) = e^{x/\sqrt{2}}\left(C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{-x/\sqrt{2}}\left(C_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

(b) Som partikulärlösning ansätter vi $y_p(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$. Insättning i differentialekvationens VL ger;

$$y_p^{(4)} + y_p = 24A + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

För att y_p skall vara en lösning på differentialekvationen måste vi således ha $A = 1, B = 0, C = 0, D = 1$ och $E = -24$. En partikulärlösning är således;

Svar: $y_p(x) = x^4 + x - 24$

(c) **Svar**: Den allmänna lösningen till differentialekvationen får vi genom att addera partikulärlösningen i deluppgift (b) till homogenlösningarna i deluppgift (a) dvs alla lösningar har formen $y = y_h + y_p$ där y_p är partikulärlösningen från (b) och y_h är någon homogenlösning från (a).

6. Betrakta den generaliserade integralen

$$\int_0^1 \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

(a) Av vilket skäl betraktas integralen som generaliserad? (1p)

Svar: Integranden $\frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ är obegränsad på intervallet $(0, 1)$ ty;

$$\frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \to \infty \quad \text{då} \quad x \to 1$$

(b) Visa att integralen är konvergent och beräkna dess värde. (4p)

Lösning: Variabelsubstitutionen $t = \arcsin x$ ger att;

$$\int_0^1 \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_0^{\pi/2} t \sin t\, dt = [-t \cos t]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos t\, dt = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1$$

Svar: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 1$

7. Låt $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ vara kolonnerna i en matris A (dvs $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_4\ \mathbf{a}_5]$) och antag att A är radekvivalent med matrisen B (dvs. $A \sim B$) där

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm en bas för nollrummet $Nul\, A$ (3p)

Lösning: Nollrummet består av alla $\mathbf{x}$ sådana att $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Låt oss ta fram alla lösningar på detta system genom radelimination på systemets totalmatris;

$$[A\ \mathbf{0}] \sim [B\ \mathbf{0}] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim ... \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Om vi som fria variabler väljer $x_3 = s$ och $x_5 = t$ så kan lösningarna skrivas på parameterform enligt följande;

$$\begin{cases} x_1 = 2s + t \\ x_2 = -s - \frac{3}{2}t \\ x_3 = s \\ x_4 = 2t \\ x_5 = t \end{cases} \quad , \quad s, t \in \mathbb{R}$$

vilket också kan skrivas på vektorform enligt följande;

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Vi ser speciellt att vektorerna $\mathbf{u} = (2, -1, 1, 0, 0)$ och $\mathbf{v} = (1, -\frac{3}{2}, 0, 2, 1)$ spänner upp nollrummet. Vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är också (uppenbart) linjärt oberoende så de bildar en bas för nollrummet.

Svar: Vektorerna $\mathbf{u} = (2, -1, 1, 0, 0)$ och $\mathbf{v} = (1, -\frac{3}{2}, 0, 2, 1)$ bildar en bas för nollrummet $Nul A$.

(b) Bildar $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5\}$ en bas för kolonnrummet $Col\, A$? (motivera ditt svar!) (2p)

Svar: Ja, ty A har samma kolonnrum som matrisen $\tilde{A} = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_5\ \mathbf{a}_4]$ och $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5$ är pivotkolonner i $\tilde{A}$. Enligt känd sats i kursen så bildar ju pivotkolonnerna en bas för kolonnrummet.

(c) Skriv $\mathbf{a}_3$ som en linjärkombination av de övriga kolonnerna i A
dvs bestäm tal c_1, c_2, c_4, c_5 sådana att $\mathbf{a}_3 = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_4\mathbf{a}_4 + c_5\mathbf{a}_5$ (3p)

Lösning: Sambandet $\mathbf{a}_3 = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_4\mathbf{a}_4 + c_5\mathbf{a}_5$ kan skrivas $[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_4\ \mathbf{a}_5]\,\mathbf{c} = \mathbf{a}_3$ och detta system löser vi med radelimination på systemets totalmatris;

$$[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_4\ \mathbf{a}_5\ \mathbf{a}_3] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lösningarna kan beskrivas på parameterform enligt följande;

$$\begin{cases} c_1 = -2 + t \\ c_2 = 1 - \frac{3}{2}t \\ c_4 = 2t \\ c_5 = t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

Speciellt ger $t = 0$ lösningen $\mathbf{c} = (-2, 1, 0, 0)$ så $\mathbf{a}_3 = -2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$

Svar: $\mathbf{a}_3 = -2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$

8. (a) Bestäm en elementär matris E av typ 3×3 vars element $e_{31} \neq 0$
(dvs elementet på rad 3 och kolonn 1 i E skall vara nollskilt). (2p)

Svar:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(motsvarar byte av rad 1 och rad 2)}$$

eller

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(motsvarar radoperationen } k \cdot (\textit{rad } 1) + (\textit{rad } 3))$$

(b) Visa att

$$det(AB) = det(A)det(B)$$

för alla kvadratiska matriser A och B av samma typ. Du får utgå från att denna multiplikationsegenskap för determinanter är känd då en av matriserna är elementär. (5p)

Bevis: Se kursboken eller föreläsningsanteckningar.

9. Formulera och bevisa medelvärdessatsen för integraler. (5p)

Bevis: Se kursboken eller föreläsningsanteckningar.