LÖSNINGSFÖRSLAG
till 22 aug 2011

TMV036/TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B

---

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(a) Beräkna $det\, A$ (3p)

Lösning:

$$det\, A = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2\left(\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right) = 2(9+4) = 26$$

Svar: $det\, A = 26$

(b) Antag att B är en matris som är radekvivalent med A.
Vad kan vi då säga om värdet på $det\, B$? (2p)

Svar: Värdet beror på vilka radoperationer som görs. Om man inte skalar om någon rad så kommer $det\, B = (-1)^n det\, A$ där n är antalet radbyten som görs. Om skalningar gjorts och dessa inte är kända så kan vi bara med säkerhet veta att $det\, B \neq 0$.

2. Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$ (4p)

Lösning: Radelimination på systemets totalmatris ger;

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ur den reducerade matrisen avläser vi att;

Svar: lösningarna ges av $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} - 2s - \frac{1}{2}t \\ x_2 = s \\ x_3 = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2}t \\ x_4 = t \end{cases} \quad , \quad s, t \in \mathbb{R}$

3. Beräkna $\displaystyle\int_3^\infty \frac{x-2}{x^3-4x}\, dx$ (5p)

Lösning:

$$\int_3^\infty \frac{x-2}{x^3-4x}\, dx = \int_3^\infty \frac{x-2}{x(x^2-4)}\, dx = \int_3^\infty \frac{1}{x(x+2)}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_3^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \frac{1}{2}\left[\ln x - \ln(x+2)\right]_3^\infty = \frac{1}{2}\left[\ln \frac{x}{x+2}\right]_3^\infty = -\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5} = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}$$

Svar: $\displaystyle\int_3^\infty \frac{x-2}{x^3-4x}\, dx = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}$

4. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} \sqrt{x}\, y' - y^2 = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$ (5p)

Lösning: Differentialekvationen är separabel ty;

$$\sqrt{x}\, y' - y^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Integration av båda led ger att $\arctan y = 2\sqrt{x} + C$. Bivillkoret $y(1) = 0$ ger sedan att $C = -2$, så $\arctan y = 2\sqrt{x} - 2 \Rightarrow y = \tan(2\sqrt{x} - 2)$

Svar: $y = \tan(2\sqrt{x} - 2)$

Till uppgifterna 5–9 skall du lämna in fullständiga lösningar.

5. Beräkna arean av det begränsade område i xy-planet som begränsas av kurvorna $y = e^x$ och $y = e^{\sqrt{x}}$ (6p)

Lösning:

$$Arean = \int_0^1 \left(e^{\sqrt{x}} - e^x\right) dx = \int_0^1 e^{\sqrt{x}}\, dx - [e^x]_0^1 =$$

$$= 2\int_0^1 te^t\, dt - (e-1) = 2\left[te^t\right]_0^1 - 2\int_0^1 e^t\, dt - e + 1 = 3 - e$$

Svar: Arean av området är $3 - e$ (a.e.)

6. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y'' - 4y' + 13y = e^{2t}\cos 3t \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$ (6p)

Lösning: Karakteristiska ekvationen $r^2 - 4r + 13 = 0$ har rötterna $r = 2 \pm 3i$, så ekvationens homogenlösningar har formen $y_h = e^{2t}(A\cos 3t + B\sin 3t)$. Som partikulärlösning ansätter vi $y_p = te^{2t}(C_1\cos 3t + C_2 \sin 3t)$. Då är;

$$y_p' = e^{2t}((C_1(1+2t) + C_2 3t)\cos 3t + (C_2(1+2t) - C_1 3t)\sin 3t)$$

och

$$y_p'' = e^{2t}((C_1(4-5t) + C_2(6+12t))\cos 3t + (C_2(4-5t) - C_1(6+12t))\sin 3t)$$

Insättning i differentialekvationens vänsterled ger;

$$y_p'' - 4y_p' + 13y_p = e^{2t}(6C_2\cos 3t - 6C_1 \sin 3t)$$

För att erhålla differentialekvationens högerled måste därför $6C_2 = 1$ och $-6C_1 = 0$, vilket ger oss partikulärlösningen $y_p = \frac{1}{6}te^{2t}\sin 3t$. Den allmänna lösningen till differentialekvationen får vi genom att addera homogenlösningarna till denna partikulärlösning;

$$y = e^{2t}(A\cos 3t + B\sin 3t) + \frac{1}{6}te^{2t}\sin 3t$$

Bivillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$ ger att $A = 1$ och $2A + 3B = 0$, så $B = -\frac{2}{3}$.

Svar: $y = e^{2t}(\cos 3t - \dfrac{2}{3}\sin 3t) + \dfrac{1}{6}te^{2t}\sin 3t$

7. Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (som vanligt) beteckna standardbasen i $\mathbb{R}^3$ och låt

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Låt vidare A vara standardmatrisen för den linjära avbildning T från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ som avbildar $\mathbf{v}_1$ på $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{v}_2$ på $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{v}_3$ på $\mathbf{e}_2$, dvs. $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{e}_1$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{e}_2$ och $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{e}_2$.

(a) Visa att $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ bildar en bas för $\mathbb{R}^3$ (3p)

(b) Bestäm en bas för kolonnrummet $Col\, A$ (2p)

(c) Bestäm en bas för nollrummet $Nul\, A$ (2p)

Lösning: Påståendet i deluppgift (a) är dessvärre fel och därmed finns inte heller tillräcklig information för att svara på de övriga deluppgifterna. Om man ändrar lite i någon av vektorerna så att de blir linjärt oberoende (vilket egentligen var tanken) så blir hela uppgiften lösbar och högst relavant för kursen.

8. Antag att A och B är kvadratiska matriser sådana att AB är inverterbar.

(a) Visa då att även A och B är inverterbara. (3p)

(b) Visa att $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (3p)

9. (a) Antag att f är en kontinuerlig funktion på ett intervall $I = [a, b]$.
Visa då att $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\, dt = f(x)$, för alla $x \in I$. (4p)

(b) Beräkna $F'(1)$ då $F(x) = x \displaystyle\int_x^1 \cos(\pi t^2)\, dt$ (2p)

Lösning: $F'(x) = \displaystyle\int_x^1 \cos(\pi t^2)\, dt - x \cos(\pi x^2)$

Svar: $F'(1) = 1$