Matematik
Chalmers tekniska högskola 2011-12-15 kl. 8:30-12:30.

Tentamen TMV036 Analys och linjär algebra K, Kf, Bt, del B

Telefonvakt: Magnus Önnheim, telefon 0703-088304 Plats: V
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgifterna 1-3 (totalt 16 poäng) är korta frågor på det grundläggande materialet och du behöver bara ge kortfattade lösningar och svar.
På uppgifterna 4-7 (totalt 34 poäng) skall du ge fullständiga lösningar. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.
Betygsgränser: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.
Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

---

1 (a) Beräkna arean av parallellogrammet som spänns upp av vektorerna $\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$. (2p)

(b) Låt $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som ger spegling genom x-axeln. Bestäm standardmatrisen för $\boldsymbol{T}$. (2p)

(c) Använd standardmatrisen i (b) och beräkna speglingen i x-axeln för parallellogrammet i (a) (dvs. spegla alla hörnpunkter i parallellogrammet) . (2p)

2 Bestäm

$$\int \frac{1}{x(x^2-1)}\,dx$$

(5p)

3 Visa att (5p)

$$\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx \leq \frac{3}{2}$$

Till uppgifterna 4-7 skall du lämna in fullständiga lösningar.

4 Låt

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Visa att kolonnerna i $\boldsymbol{A}$ är linjärt oberoende. (4p)

(b) Vilken rang har $\boldsymbol{A}$? (motivera ditt svar). (2p)

(c) Visa att $\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{T}}$ inte är inverterbar. (3p)

(d) Låt $\boldsymbol{A}$ vara standardmatrisen till en linjär avbildning $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$. Är $\boldsymbol{T}$ en surjektiv avbildning? (motivera ditt svar). (2p)

5 Visa att om $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$ är två $n \times n$ matriser så gäller att (5p)

$$det(\boldsymbol{AB}) = det(\boldsymbol{A})det(\boldsymbol{B})$$

6 Visa att (5p)

$$e^{rx} \text{ är en lösning till differentialekvationen } y'' + ay' + by = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$r \text{ är en rot till den karakteristiska ekvationen } r^2 + ar + b = 0$$

7 (a) Klassificera differentialekvationerna i (b) och (c) nedan och motivera val av lösningsmetoder. (1p)

(b) Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y' - y = x^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

(5p)

(c) Bestäm samtliga lösningar till

$$y'' - y = xe^{-x} + x^2 + 1$$

(7p)

Lycka till och God Jul !!

önskar Katarina

LÖSNINGSFÖRSLAG

Matematik
Chalmers tekniska högskola 2011-12-15 kl. 8:30-12:30.

Tentamen TMV036 Analys och linjär algebra K, Kf, Bt, del B

Telefonvakt: Magnus Önnheim, telefon 0703-088304 Plats: V
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgifterna 1-3 (totalt 16 poäng) är korta frågor på det grundläggande materialet och du behöver bara ge kortfattade lösningar och svar.
På uppgifterna 4-7 (totalt 34 poäng) skall du ge fullständiga lösningar. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.
Betygsgränser: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.
Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

---

1 (a) *Beräkna arean av parallellogrammet som spänns upp av vektorerna* $\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ *och* $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$. (2p)

$$|\det(\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix})| = |-3 \cdot 3 - 4 \cdot 4| = 25$$

(b) *Låt* $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *vara den linjära avbildning som ger spegling genom* x*-axeln. Bestäm standardmatrisen för* $\boldsymbol{T}$. (2p)
Vi har $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1$ och $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2) = -\boldsymbol{e}_2$ vilket ger

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1) & \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & -\boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(c) *Använd standardmatrisen i (b) och beräkna spegligen i* x*-axeln för parallellogrammet i (a) (dvs. spegla alla hörnpunkter i parallellogrammet) .* (2p)

$$\boldsymbol{T}(\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}(\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}) = \boldsymbol{T}(\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}) + \boldsymbol{T}(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

2 *Bestäm*

$$\int \frac{1}{x(x^2-1)}\,dx$$

(5p)

Ansätt

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x+1)}$$

Multiplicera med vänsterledets nämnare och samla ihop termerna

$$1 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1) = x^2(A+B+C) + x(B-C) - A$$

Jämför högerled och vänsterled:

$$\begin{cases} 1 = -A \\ 0 = B - C \\ 0 = A + B + C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = \frac{1}{2} \\ C = \frac{1}{2} \end{cases}$$

dvs

$$\int \frac{1}{x(x^2-1)}\,dx = \frac{1}{2}\int -2\frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+1)}\,dx =$$
$$\frac{1}{2}(-2\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx) =$$
$$\frac{1}{2}(-2\ln|x| + \ln|x-1| + \ln|x+1|) + C = \frac{1}{2}\ln\frac{|x^2-1|}{x^2} + C$$

3 *Visa att* (5p)

$$\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx \leq \frac{3}{2}$$

Eftersom $\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ är avtagande funktion är

$$\frac{1}{1+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2} = f(1) \text{ för } 1 \leq x \leq 4$$

alltså följer att

$$\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx \leq \int_1^4 \frac{1}{2}dx = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

4 *Låt*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) *Visa att kolonnerna i* $\boldsymbol{A}$ *är linjärt oberoende.* (4p)

$$x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

som bara har lösningarna $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ och $x_3 = 0$.

(b) *Vilken rang har* $\boldsymbol{A}$*? (motivera ditt svar).* (2p)

Rangen 3 eftersom alla kolonnerna i A är pivotkolonner.

(c) *Visa att* $\boldsymbol{bb^T}$ *inte är inverterbar.* (3p)

$$\boldsymbol{bb}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser direkt att kolonnerna är linjärt beroende (tex. 1:a kol kan skrivas som (-1) multiplicerat med den andra kolonnen) alltså är matrisen inte inverterbar.

Alt. Vi ser direkt att vi har en kolonn som bara består av 0:or, dvs kolonnerna i matrisen är linjärt beroende, alltså är matrisen inte inverterbar.

(d) *Låt* $\boldsymbol{A}$ *vara standardmatrisen till en linjär avbildning* $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$. *Är* $\boldsymbol{T}$ *en surjektiv avbildning? (motivera ditt svar).* (2p)

Nej, den är inte surjektiv. Tag tex $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ som ju inte kan skrivas som en linjärkombination av kolonnerna i $\boldsymbol{A}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right]$$

5 Se föreläsningsanteckningar eller kursbok

6 Se föreläsningsanteckningar eller kursbok

7 (a) *Klassificera differentialekvationerna i (b) och (c) nedan och motivera val av lösningsmetoder.* (1p)

(b) är linjär, första ordningens ekvation - därför väljer vi att lösa den med integrerande faktor. I (c) är det fråga om en andra ordningens inhomogen (linjär) ekvation med konstanta koefficienter. Vi löser den därför genom att först bestämma homogenlösningen (mha karakteristiska ekvationen), sedan bestämmer vi partikulärlösning genom lämplig ansats.

(b) *Lös differentialekvationen* (5p)

$$\begin{cases} y' - y = x^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Vi har $f(x) = -1$, med $F(x) = -x$ och integrerande faktor $e^{F(x)} = e^{-x}$

$$(e^{-x}y)' = e^{-x}x^2 \Leftrightarrow e^{-x}y = \int e^{-x}x^2dx + C$$

Upprepad partialintegration ger $y = -(x^2 + 2x + 2) + Ce^x$ Begynnelsevillkoret $y(0) = 2$ ger

$$2 = -2 + C \Leftrightarrow C = 4$$

Svar $y = -(x^2 + 2x + 2) + 4e^x$

(c) *Bestäm samtliga lösningar till* (7p)

$$y'' - y = xe^{-x} + x^2 + 1$$

Homogenlösningar:
Karakteristisk ekvation $r^2 - 1 = 0$ med rötter $r_{1,2} = \pm 1$.

$$y_h = C_1e^{-x} + C_2e^x$$

Partikulärlösning:
Pga linjäritet kan vi betrakta högerledet som en summa av xe^{-x} och ett polynom.

$$y'' - y = xe^{-x}$$

Ansätt $y_p = z(x)e^{-x}$. Vi får $y_p' = (z' - z)e^{-x}$ och $y_p'' = (z'' - 2z' + z)e^{-x}$.
Insättning ger $y_p'' - y_p = (z'' - 2z')e^{-x} = xe^{-x}$, dvs $z'' - 2z' = x$.
Med ansatsen $z_p = x(Ax + B)$ får vi $z_p' = 2Ax + B$, $z_p'' = 2A$.
Vi får $z_p'' - 2z_p' = 2A - 4Ax - 2B = x$, dvs $A = B = -\frac{1}{4}$
Alltså $z_p = -\frac{1}{4}(x^2 + x)$ och $y_p = -\frac{1}{4}(x^2 + x)e^{-x}$

$$y'' - y = x^2 + 1$$

Ansätt $y_p = Ax^2 + Bx + C$. Vi får $y_p' = 2Ax + B$ och $y_p'' = 2A$.
Insättning ger $y'' - y = 2A - Ax^2 - Bx - C = x^2 + 1$, dvs $A = -1$, $B = 0$ och $2A - C = 1 \Rightarrow C = -3$ Dvs $y_p = -x^2 - 3$
Slutligen

$$y = y_p + y_h = -\frac{1}{4}(x^2 + x)e^{-x} + (-x^2 - 3) + C_1 e^{-x} + C_2 e^x$$