Matematik
Chalmers tekniska högskola 2012-04-12 kl. 14:00 - 18:00.

Tentamen TMV036 Analys och linjär algebra K, Kf, Bt, del B

Telefonvakt: Oskar Hamlet, telefon 0703-088304 Plats: V
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.
Betygsgränser: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.
Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

---

1. (a) Låt $\boldsymbol{T} : \boldsymbol{R^2} \rightarrow \boldsymbol{R^2}$ vara den linjära avbildning som ger spegling genom origo. Bestäm standardmatrisen för $\boldsymbol{T}$. (3p)

   (b) Låt $\boldsymbol{S}$ vara parallellogrammet som bestäms av vektorerna
$$\boldsymbol{b_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{b_2} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$
   Låt $\boldsymbol{T(S)}$ vara speglingen av $\boldsymbol{S}$ genom origo. Bestäm speglingen $\boldsymbol{T(S)}$, rita en figur (av speglingen) och bestäm dess area. (3p)

2. Skissa det område $\boldsymbol{\Omega}$ i det komplexa talplanet som består av alla komplexa tal z för vilket $|z - i| \leq 3$ och $\frac{\pi}{2} \leq arg(z) \leq \pi$ (3p)

3. Låt
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
   (a) Visa att kolonnerna i $\boldsymbol{A}$ är linjärt beroende. (3p)

   (b) Gäller det att $\boldsymbol{b} \in Col\boldsymbol{A}$? (motivera ditt svar). (3p)

   (c) Har ekvationssystemet $\boldsymbol{A^T A x} = \boldsymbol{A^T b}$ en entydig lösning? (motivera ditt svar). (3p)

4. Visa att den generaliserade integralen
$$\int_0^\infty e^{-x} dx$$
   är konvergent. (5p)

5. Bestäm en primitiv funktion till
$$f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{2x}}$$
   då $x \geq 0$. (5p)

6. Låt $y(t)$ vara mängden radioaktiv materia vid tiden t, m vara mängden vid tiden $t = 0$ och k är en konstant (sönderfallskonstanten). En matematisk modell för radioaktivt sönderfall är
$$\begin{cases} y' + ky = 0 \\ y(0) = m \end{cases}$$
   (a) Bestäm $y(t)$. Motivera val av metod. (5p)

   (b) Låt T beteckna halveringstiden (den tid då mängden radioaktivt material halverats). Bestäm ett uttryck för sönderfallskonstanten k. (2p)

7. Bestäm alla lösningar till

$$y'' + 4y' + 4y = t^2$$

(5p)

8. Låt $\boldsymbol{A}$ vara en $m \times n$ matris, låt $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ vara två vektorer i $\boldsymbol{R^n}$ och c en skalär. Visa att (5p)

   (a) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$

   (b) $\boldsymbol{A}(c\boldsymbol{u})=c(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u})$

9. Formulera och bevisa medelvärdessatsen för integraler. (5p)

Lösningsförslag

Matematik
Chalmers tekniska högskola 2012-04-12 kl. 14:00 - 18:00.

Tentamen TMV036 Analys och linjär algebra K, Kf, Bt, del B

Telefonvakt: Oskar Hamlet, telefon 0703-088304 Plats: V
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.
Betygsgränser: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.
Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

---

1. *(a) Låt $\boldsymbol{T} : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ vara den linjära avbildning som ger spegling genom origo. Bestäm standardmatrisen för $\boldsymbol{T}$.* (3p)

Vi har $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e_1}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e_2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, dvs standardmatrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

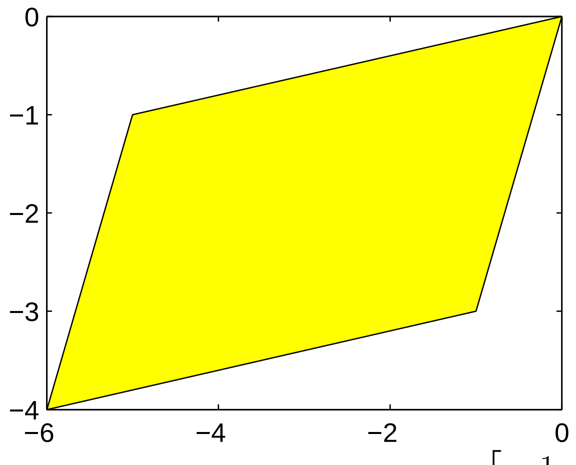
Låt $\boldsymbol{S}$ vara parallellogrammen som bestäms av vektorerna

$$\boldsymbol{b_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{b_2} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Låt $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{S})$ vara speglingen av $\boldsymbol{S}$ genom origo. Bestäm speglingen $T(S)$, rita en figur (av speglingen) och bestäm dess area. (3p)

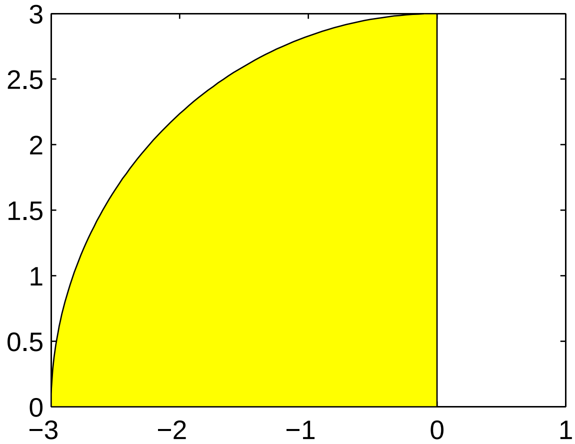
$\boldsymbol{Ab_1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{Ab_2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}$

Speglingen är parallellogrammet som bestäms av vektorerna $\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}$.



Vi har att 'arean av $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{S})$' $= |det(\begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix})| = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 5 = |-14| = 14$

(b) Skissa det område Ω i det komplexa talplanet som består av alla komplexa tal z för vilket $|z - i| \leq 3$ och $\frac{\pi}{2} \leq arg(z) \leq \pi$ (3p)



3. *Låt*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(a) *Visa att kolonnerna i $\boldsymbol{A}$ är linjärt beroende.* (3p)

Låt $\boldsymbol{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{a_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi ser att $\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{0}$, dvs vektorerna är linjärt beroende.

(b) *Gäller det att $\boldsymbol{b} \in Col\boldsymbol{A}$? (motivera ditt svar).* (3p)

Nej, ty $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ saknar lösning.

(c) *Har ekvationssystemet $\boldsymbol{A^T A x} = \boldsymbol{A^T b}$ en entydig lösning? (motivera ditt svar).* (3p)

$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$

$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

och radreducering av den utökade matrisen ger
$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Vi har en fri variabel, dvs oändigt många lösningar.

4. *Visa att den generaliserade integralen*

$$\int_0^\infty e^{-x} dx$$

är konvergent. (5p)

$\lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-x} dx = \lim_{A\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^A = \lim_{A\to\infty}(-e^{-A} - (-1)) = 1$

5. *Bestäm en primitiv funktion till*

$$f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{2x}}$$

då $x \geq 0$ (5p)

Låt $2x = u^2$, $2dx = 2udu$, vi får $\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}} dx = \int \frac{u}{1+u} du = \int 1 - \frac{1}{1+u} du = u - \ln(1 + u) + C = \sqrt{2x} - \ln(1 + \sqrt{2x}) + C$

6. *Låt $y(t)$ vara mängden radioaktiv materia vid tiden t, m vara mängden vid tiden $t = 0$ och k är en konstant (sönderfallskonstanten). En matematisk modell för radioaktivt sönderfall är*

$$\begin{cases} y' + ky = 0 \\ y(0) = m \end{cases}$$

   (a) *Bestäm $y(t)$. Motivera val av metod.* (5p)

   Detta är en linjär ekvation av första ordningen, därför används integrerande faktor för att lösa den.

   Den integrerande faktorn är e^{kt}, och efter multiplikation av ekvationen med denna får vi

$$y'e^{kt} + kye^{kt} = 0$$

   som kan skrivas

$$(ye^{kt})' = 0$$

   Integration ger $ye^{kt} = C$, dvs $y = Ce^{-kt}$. Med hjälp av begynnelsevillkoret $y(0) = m$ får vi att $C = m$. Dvs lösningen på problemet är

$$y(t) = me^{-kt}$$

   (b) *Låt T beteckna halveringstiden (den tid då mängden radioaktivt material halverats). Bestäm ett uttryck för sönderfallskonstanten k.* (2p)

   Vid tiden $t = T$ gäller att mängden materia halverats, dvs

$$\frac{1}{2}m = me^{-kT}$$

   Detta ger sambandet

$$k = \frac{\ln 2}{T}$$

7. *Bestäm alla lösningar till*

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = t^2$$

(5p)

Homogenlösningarna: Den karakteristiska ekvationen

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

har lösningarna $r_{1,2} = -2$, vilket ger homogenlösningarna

$$y_h(t) = Ae^{-2t} + Bte^{-2t}$$

En partikulärlösning: Vi har ett polynom i högerledet, använd polynomreceptet. Ansätt

$$y_p(t) = A_2t^2 + A_1t + A_0$$

Då är $y_p'(t) = 2A_2t + A_1$ och $y_p''(t) = 2A_2$, och därmed

$$y_p''+4y'+4y = 2A_2+4(2A_2t+A_1)+4(A_2t^2+A_1t+A_0) = 4A_2t^2+(8A_2+4A_1)t+2A_2+4A_1+4A_0$$

Identifiering med högerledet t^2 ger

$$\begin{cases} A_0 = \frac{3}{8} \\ A_1 = -\frac{1}{2} \\ A_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Och

$$y_p(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}$$

Samtliga lösningar ges av

$$y_p(t) + y_h(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8} + Ae^{-2t} + Bte^{-2t}$$

8. *Låt* $\boldsymbol{A}$ *vara en* $m \times n$ *matris, låt* $\boldsymbol{u}$ *och* $\boldsymbol{v}$ *vara två vektorer i* $\boldsymbol{R^n}$ *och* c *en skalär. Visa att* (5p)

   (a) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$

   (b) $\boldsymbol{A}(c\boldsymbol{u})=c(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u})$

   Se litteraturen.

9. *Formulera och bevisa medelvärdessatsen för integraler.* (5p)

   Se litteraturen.