Matematik
Chalmers tekniska högskola 2012-12-17 kl. 8:30-12:30.

Tentamen TMV036 Analys och linjär algebra K, Kf, Bt, del B

Telefonvakt: Magnus Önnheim, telefon 0703-088304 Plats V
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten. Formelblad är bilagt.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.
Betygsgränser: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.
Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

Lösningsförslag

1 Låt

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm alla lösningar till $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$

(b) Visa att $\boldsymbol{bb}^T$ inte är inverterbar.

(c) matrisen $\boldsymbol{A}$ ovan. Visa att span$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\} \neq \mathbb{R}^3$.

(a) $$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 7 & 3 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Med $x_3 = t$ fri får vi $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1+1/3t \\ -8/3t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1/3 \\ -8/3 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $$\boldsymbol{bb}^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Vi ser direkt att kolonnerna är linjärt beroende, tex. så är

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

och därmed är matrisen inte inverterbar.

(c) Tex kan vi visa att det finns en vektor i $\mathbb{R}^3$ som inte kan skrivas som en linjärkombination av $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$. Låt $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, vi får

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{c} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 7 & 1 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

som saknar lösning

2 (a) Använd partiell integration och beräkna

$$\int_0^{\pi} x \cos x dx$$

(b) Dela upp i partialbråk och beräkna

$$\int \frac{1}{(u-1)u^2} du$$

(c) Beräkna

$$\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$$

(a) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos x dx = [x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx = [\cos x]_0^\pi = -2$

(b) Ansätt

$$\frac{1}{(u-1)u^2} = \frac{A}{u-1} + \frac{Bu+C}{u^2}$$

Multiplicera med vänsterledets nämnare och samla ihop termerna

$$1 = Au^2 + (Bu+C)(u-1) \Leftrightarrow 1 = u^2(A+B) + u(C-B) - C$$

Jämför högerled och vänsterled:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-B=0 \\ -C=1 \end{cases}$$

vi får $A = 1$, $B = -1$ *och* $C = -1$ *och*

$$\frac{1}{(u-1)u^2} = \frac{1}{u-1} - \frac{u+1}{u^2} = \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}$$

$$\int \frac{1}{(u-1)u^2} du = \int \frac{1}{u-1} du - \int \frac{1}{u} du - \int \frac{1}{u^2} du = \ln|u-1| - \ln|u| + \frac{1}{u} + C$$

(c) Använd variabelsubstitution:

$$\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{1}{(1+e^x)^2} dx = \begin{bmatrix} u = (1+e^x) \\ du = e^x dx = (u-1)dx \\ x = \ln(2) \Rightarrow u = (1+e^{\ln(2)}) = 3 \\ x = \ln(3) \Rightarrow u = 4 \end{bmatrix} = \int_3^4 \frac{1}{(u-1)u^2} du =$$

Se 2 (b) $\displaystyle = \left[\ln|u-1| - \ln|u| + \frac{1}{u}\right]_3^4 = (\ln(3) - \ln(4) + \frac{1}{4}) - (\ln(2) - \ln(3) + \frac{1}{3}) =$

$\displaystyle 2\ln(3) - 3\ln(2) - \frac{1}{12}$

3 (a) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' + 2xy - x = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(b) Skriv om differentialekvationen

$$ay'' = -b\sin(y) - cy'$$

där a, b och c är konstanter,till ett system av första ordningen.

(c) Bestäm samtliga lösningar till

$$y'' + 2y' + 2y = 8e^{-x}$$

(a) *Vi har första ordningen, linjär differentialekvation. Den integrerande faktorn blir* e^{x^2} *eftersom* x^2 *är en primitiv funktion till* $2x$*. Vi får*
$y(x)e^{x^2} = \int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C \Leftrightarrow y(x) = e^{-x^2}\frac{1}{2}e^{x^2} + e^{-x^2}C = \frac{1}{2} + e^{-x^2}C$
Begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ *ger* $1 = \frac{1}{2} + C$*, dvs* $C = \frac{1}{2}$

(b) *Låt* $u_1 = y$*,* $u_2 = y'$*, vi får*
$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = -\frac{b}{a}\sin(u_1) - \frac{c}{a}u_2 \end{cases}$

(c) *Linjär andra ordningen med konstanta koeficienter, vi har* $8e^{-x}$ *i högerledet. Använd exponentialrecepet för partikulärlösning:*
Ansätt $y(x) = z(x)e^{-x}$*, vi får* $y' = e^{-x}(z' - z)$ *och* $y'' = e^{-x}(z'' - 2z' + z)$ *Detta ger* $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}(z'' + z)$*. Sök partikulärlösning till* $(z'' + z) = 8$ *med polynomreceptet och får* $z_p = 8$ *och därmed* $y_p = z_pe^{-x} = 8e^{-x}$*.*
För homogenlösningarna löser vi den karekteristiska ekvationen $r^2+2r+2 = 0$*, som har rötterna* $r_{1,2} = -1 \pm i$ *och vi får* $y_h = Ae^{-x}\cos(x) + Be^{-x}\sin(x)$
Samtliga lösningar ges av $y_p + y_h = 8e^{-x} + Ae^{-x}\cos(x) + Be^{-x}\sin(x)$

4 Låt $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara avbildning (skalning) med standardmatrisen

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Visa att avbildningen är linjär.

(b) Beräkna bilden av parallellogrammen som spänns upp av $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) Låt S vara ettområde i planet som avgränsas av en cirkel med radie p. Beräkna arean av bilden $\boldsymbol{T}(S)$

(d) Skriv upp standarbatrisen för den inverterade avbildningen.

(a) *Låt* $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \mathbb{R}^2$*, vi har att* $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{A}u_1 + \boldsymbol{A}u_2 = \boldsymbol{T}(u_1) + \boldsymbol{T}(u_2)$
och $\boldsymbol{T}(c\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{A}c\boldsymbol{u}_1 = c\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_1 = c\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}_1)$*, där* c *är en skalär.*

(b) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$

(c) *Området* S *begränsas av en cirkel med radie* p*. Vi har att 'Arean av* $\boldsymbol{T}(S)$*' =* $\det(\boldsymbol{A})$ *'Arean av* S*' =* $\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}\pi p^2 = 15\pi p^2$

(d) $\begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

5 Differentialekvationen

$$S'(t) = -\frac{cS(t)}{S(t) + K_M}\ , t \geq 0$$

där $c > 0$ och $K_M > 0$ är två konstanter är separabel.

(a) Lös differentialekvationen med metoden för separabla differentialekvationer, låt $S(0) = 1$

(b) Om du har löst ekvationen rätt i (a) har du fått en implicit formel för $S(t)$. Man vill kunna rita en graf av $S(t)$ (tex. med hjälp av Matlab). Skriv ner den ekvation $f(S) = 0$ som man då måste lösa för olika tidpunkter.

(a) $S'(t) = -\frac{cS(t)}{S(t) + K_M}$ *skrivs om till* $S'(t)\frac{(S(t) + K_M)}{S(t)} = -c$ *Integrera högerled och vänsterled, vi får* $\int \frac{S(t) + K_M}{S(t)}dS = -\int cdt$*, dvs* $S(t) + K_M\ln(S(t)) = -ct + C$ *där* C *är en konstant. Villkoret* $S(0) = 1$ *ger* $C = 1$

(b) $f(S(t)) = S(t) + K_M \ln(S(t)) + ct - 1 = 0$

Lycka till och God Jul !!
önskar Katarina