Matematik
Chalmers tekniska högskola 2013-04-05 kl. 14:00-18:00.

Tentamen TMV036 Analys och linjär algebra K, Kf, Bt, del B

Telefonvakt: Cornelia Jareteg, telefon 0703-088304 Plats: V
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten. Formelblad är bilagt.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.
Betygsgränser: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.
Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

L Ö S N I N G S F Ö R S L A G

1 Låt

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 3 & -7 & -5 \\ 3 & -9 & -9 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm alla lösningar till $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ (4p)

(b) Bestäm baser för nollrum och kolonnrum till matrisen $\boldsymbol{A}$. Vilken rang har matrisen? (4p)

(c) Låt $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Ax}$ vara en linjär avbildning med $\boldsymbol{A}$ som standardmatris. Är $\boldsymbol{f}$ surjektiv? (Motivera ditt svar). (2p)

(d) Bevisa eller motbevisa följande påstående: Om kolonnerna i en $n \times n$ matris $\boldsymbol{B}$ är linjärt beroende så är $\det \boldsymbol{B} \neq 0$. (3p)

(a) $$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 3 & 6 & 0 \\ 3 & -7 & -5 & 0 \\ 3 & -9 & -9 & 0 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Med $x_3 = t$ fri får vi $\boldsymbol{x} = t \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) Den utökade matrisen $\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \end{array}\right]$ radreduceras till trappstegsform enligt (a) ovan. Vi får $\boldsymbol{x} = t \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = t\boldsymbol{v}_1$ och $\{\boldsymbol{v}_1\}$ är bas för nollrummet till $\boldsymbol{A}$. Pivotkolonnerna $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -9 \end{bmatrix}$ bildar en bas för matrisens kolonnrum. Matrisens rang är 2.

(c) Nej avbildningen är inte surjektiv. Endast två vektorer bildar bas för matrisens kolonnrum (se (b)), dessa två vektorer spänner inte upp upp hela $\mathbb{R}^3$

(d) Påståendet är falskt, ty radreducera $\boldsymbol{B}$ till radreducerad trappstegsform Eftersom kolonnerna i $\boldsymbol{B}$ är linjärt beroende kommer vi att få minst en 0:a i något av diagonalelementen, och determinanten blir 0.

---

2 (a) Använd variabelsubstitution och beräkna (4p)

$$\int_0^1 xe^{x^2}dx$$

(b) Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området mellan $x = 1$, $x = 3$, $y = 2$ och $y = 5$ roteras runt x-axeln. (3p)

(c) Bestäm (3p)

$$\int \frac{1}{(1+e^x)^2}dx$$

Redovisa din lösning och berätta vilka tekniker du använt dig av.

(a) $\int_0^1 xe^{x^2}dx = \begin{bmatrix} t = x^2 \\ dt = 2xdx \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int_0^1 e^t dt = \frac{1}{2}\left[e^t\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$

(b) $\int_1^3 \pi(5^2 - 2^2)dx = 42\pi$

(c) $\int \frac{1}{(1+e^x)^2}dx = \begin{bmatrix} \text{Variabelsubstitution:} \\ u = 1+e^x \\ du = e^x dx = (u-1)dx \end{bmatrix} = \int \frac{du}{u^2(u-1)} = \begin{bmatrix} \text{Partialbråks-} \\ \text{uppdelning} \end{bmatrix} =$

$\int \frac{1}{u-1}du - \int \frac{1}{u}du - \int \frac{1}{u^2}du = \ln|u-1| - \ln|u| + \frac{1}{u} + C$

---

3 (a) Använd integrerande faktor och lös ekvationen (4p)

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = 1$$

(b) Visa att ekvationen i (a) är linjär (3p)

(c) Bestäm en partikulärlösning till (3p)
$y'' - 5y' + 6y = (2x+1)e^{2x}$

(a) Integrerande faktorn blir $e^{\ln(1+x^2)}$. Multiplicerar högerled och vänsterled med den integrerande faktorn och får ekvationen $(1+x^2)y'+2xy = (1+x^2)$. Eftersom vänsterledet nu är derivatan av $(1+x^2)y$ har vi att
$(1+x^2)y = x+\frac{1}{3}x^3+C$ där C är en konstant. Vi får lösningen $y = \dfrac{x+\frac{1}{3}x^3+C}{1+x^2}$

(b) Visa att ekvationen uppfyller linjäritetsvillkoret. Se litteraturen.

(c) Ansätt $y = z(x)e^{2x}$. Vi får då (derivation av produkt)
$y' = (z'(x) + 2z(x))e^{2x}$
$y''(x) = (z''(x) + 4z'(x) + 4z(x))e^{2x}$
Detta ger
$y'' - 5y' + 6y = (z'' - z')e^{2x}$
Partikulärlösning till $(z'' - z) = 2x + 1$ bestäms mha polynomreceptet:
Ansätt $z_S(x) = x(A_1x + A_0) = A_1x^2 + A_0x$.
Derivation ger $z_S'' - z_S = -2A_1x + 2A_1 - A_0$.
Identifierar högerledet med polynomet $2x + 1$ och får:
$\begin{cases} -2A_1 = 2 \\ 2A_1 - A_0 = 1 \end{cases}$ dvs $A_1 = -1$ och $A_0 = -3$.
Alltså $z_S = x(-x-3) = -(x^2+3x)$
Och därmed är $y_p = -(x^2+3x)e^{2x}$ en partiklärlösning.

4 (a) Hur defineras e^{ix}? (2p)

(b) Visa att $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$. (4p)

(c) Förklara varför ett komplext tal vrids $\frac{\pi}{2}$ radianer motsols när det multipliceras med i. (4p)

(a) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

(b) $e^{ix}e^{iy} = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y) = \cos(x+y) + i \sin(x+y) = e^{i(x+y)}$

(c) Låt $z = a + bi$, vi får då $iz = i(a+bi) = -b + ai$. Rita tex lämplig figur.

---

5 (a) Låt $u(t)$ vara mängden radioaktiv materia vid tiden t, m vara mängden vid tiden $t = 0$ och k är en konstant (sönderfallskonstanten). En matematisk modell för radioaktivt sönderfall för ett ämne är (3p)

$$\begin{cases} u' + ku = 0 \\ u(0) = m \end{cases}$$

I följande matlabkod har man låtit $m = 10$, $k = 2$ och beräknat värden på u för $0 \leq t \leq 10$

```
[t,U]=ode45(@(t,u)-2*u,[0,10],10);
```

Beskriv (eller skriv i Matlab) hur man utifrån de värden man beräknat ovan kan bestämma en ungefärlig halveringstid. (Halveringstid är den tid då mängden radioaktivt material har halverats).

(b) Beskriv Euler's (framåt-)metod för numerisk lösning av differentialekvationer. (4p)

(a) Leta i `U` efter första elementet som är $\leq \frac{10}{2}$.

```
htid = t(min(find(U<=5)))
```

(b) Se litteraturen.

Lycka till !!
önskar Katarina