Matematik
Chalmers tekniska högskola 2013-08-26 kl. 8:30-12:30.

Tentamen TMV036 Analys och linjär algebra K, Kf, Bt, del B

Telefonvakt: Christoffer Standard, telefon 0703-088304 Plats och tid: M, 8:30 - 12:30
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.
Betygsgränser: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.
Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

L Ö S N I N G S F Ö R S L A G

---

1 Låt

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm alla lösningar till ekvationen $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$ (4p)

(b) Vilken rang har matrisen $\boldsymbol{A}$? (3p)
Vilken rang har matrisen $\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{I}$, där $\boldsymbol{I}$ är enhetsmatrisen?
Motivera dina svar.

(c) Låt $\boldsymbol{B}$ vara en godtycklig 2×2-matris. Visa att om $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$ så är $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$. (3p)

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.
x_2 fri, låt $x_2 = t$, där t är en godtycklig skalär, vilket ger $x_1 = -2t$.

(b) $\boldsymbol{A}$ har två linjärt oberoende kolonner ($\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$), dvs rang 2.
$\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, som har en pivotkolonn (radreducera!), dvs rangen är 1.

(c) $\boldsymbol{A}$ är inverterbar (se (b)) och $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$. Låt $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$, vi har då att $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{0}$, dvs $\boldsymbol{IB} = \boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{B}$ måste vara $\boldsymbol{0}$.

---

2 (a) Visa att (3p)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2 + 4x} dx$$

är konvergent.

(b) Dela upp i partialbråk och beräkna (4p)

$$\int \frac{2x + 3}{(x - 1)^2} dx$$

(c) Använd variabelsubstitution och beräkna (3p)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx$$

(a) $0 \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+4x} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$

(b) $\frac{2x+3}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} \Leftrightarrow 2x+3 = A(x-1) + B = Ax - A + B.$

Vi får $A = 2$ och $B = 5$, dvs

$$\int \frac{2x+3}{(x-1)^2} dx = \int \frac{2}{(x-1)} dx + \int \frac{5}{(x-1)^2} dx = 2\ln|x-1| - \frac{5}{x-1} + K$$

(c) $\int_0^{\pi/2} sin^2(x)cos(x)dx = \begin{bmatrix} u = \sin(x) \\ \frac{du}{dx} = \cos(x) \end{bmatrix} = \int_0^1 u^2 du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

---

3 (a) Lös begynnelsevärdesproblemet (4p)

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

(b) Skriv om differentialekvationen i (a) till ett system av första ordningen. Uttryck ditt svar i matris-vektor produkt. (3p)

(c) Formulera Euler's metod för numerisk lösning av differentialekvationer. (3p)

(a) Karekteristisk ekvation $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ har lösningarna $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Vi får $y(t) = Ae^t + Be^{2t}$. Begynnelsevillkoren ger $A + B = 5$ och $A + 2B = 4$, dvs $A = 6$ och $B = -1$. Lösngen blir $y = 6e^t - e^{2t}$

(b) Låt $u_1 = y, u_2 = y'$, vi får $\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ 3u_2 - 2u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

(c) Se litteraturen.

---

4 Låt $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en avbildning med standardmatrisen

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

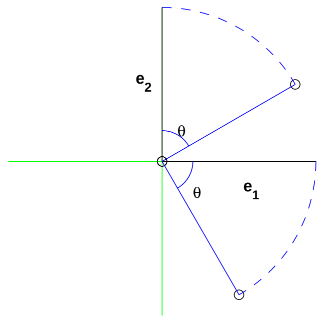
(a) Beräkna bilden av parallellogrammen som spänns upp av $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Låt $\theta = \pi/2$. (3p)

(b) Visa att avbildningen roterar varje 2×1 vektor med en vinkel θ medurs. (3p)

(c) Skriv upp standardmatrisen för transformationen som roterar varje 2×1 vektor vinkeln θ moturs. (4p)

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$

(b) Se figur



(c) Inversen till $\boldsymbol{A}$ som är $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

---

5 Integralvärdena

$$I_n = e^{-1}\int_0^1 e^x x^n dx, \text{ för } n = 0, 1, 2, \ldots$$

kan beräknas med hjälp av rekursionsformeln

$$I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n \text{ med } I_0 = 1 - e^{-1}$$

(a) Det gäller dels att integralvärdena $I_n \geq 0$, och att $I_n \geq I_{n+1}$. Förklara varför. (3p)

(b) Bevisa att integralvärdena I_n kan beräknas med rekursionsformeln ovan. (4p)

(c) Man vill beräkna I_7 med rekursionsformeln ovan och har i Matlab skrivit följande for-loop: (3p)

```
I = 0.63;
for n = 1:7
  I = 1 - (n + 1)*I;
end
disp(I);
```

Svaret blir dock inte riktigt. Förklara varför. (*Ledning:* Det har med startvärdet på `I` att göra. $I_0 = 1 - e^{-1} = 0.63212\ldots$. I koden ovan har man börjat med `I = 0.63`. Hur växer felet?).

(a) Integranden är positiv på integrationsintervallet, därför blir integralen positiv. $x^n > x^{n+1}$ på integrationsintervallet, därför blir $I_n \geq I_{n+1}$.

(b) $I_0 = e^{-1}\int_0^1 e^x x^0 dx = e^{-1}\left[e^x\right]_0^1 = 1 - e^{-1}$

$I_{n+1} = e^{-1}\int_0^1 e^x x^{n+1} dx = [P.I.] = e^{-1}(\left[e^x x^{n+1}\right]_0^1 - (n+1)\int_0^1 e^x x^n dx) = e^{-1}(e^1 - (n+1)\int_0^1 e^x x^n dx) = 1 - (n+1)I_n$

(c) $I_1 = 1 - I_0$
$I_2 = 1 - 2I_1 = 1 - 2(1 - I_0) = 1 - 2 + 2I_0$
$I_3 = 1 - 3I_2 = 1 - 3(1 - 2 + 2I_0) = 1 - 3 + 3 * 2 - 3 * 2I_0 = a_3 - 3!I_0$
$\ldots$
$I_7 = 1 - 7I_6 = \ldots a_7 + 7!I_0$

Låt $E = (1 - e^{-1}) - 0.63$. I loopen börjar man med `I=0.63`, dvs $I_0 = \mathtt{I} + E$. $I_7 = a_7 + 7!(I + E)$. Felet har växt till $7!E$ som ju är mycket större än I_0 och därmed I_7.

Lycka till !!

önskar Katarina