Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Niklas Eriksen

Tentamen i tmv 035 C, Analys och linjär algebra C för K, Kf och Bt
lösningar
2008-03-15

Ordinarie tenta

---

1. Undersök vilka tal a, b och c som gör att matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & b & c \end{pmatrix}$$

har vektorn $\boldsymbol{v} = (1, 2, -1)^T$ som egenvektor. Vilket blir egenvärdet?

Lösning: Om A ska ha $\boldsymbol{v} = (1, 2, -1)^T$ som egenvektor måste vi ha

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5-a \\ 2+2b-c \end{pmatrix}$$

Första komponenten ger $\lambda = 2$, den andra ger $a = 1$ och den tredje $4 + 2b - c = 0$. Med $b = t$ godtycklig fås $c = 4 + 2t$.

2. Diagonalisera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

ortogonalt.

Lösning: Egenvärdena beräknas genom

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2 - 25 \\ &= (\lambda + 4)(\lambda - 6). \end{aligned}$$

Egenvärdena är således -4 och 6. Ekvationerna $(A-\lambda I)\boldsymbol{v} = 0$ för dessa värden löses av $\boldsymbol{v}_1 = (1,-1)^T$ och $\boldsymbol{v}_2 = (1,1)^T$. Dessa är ortogonala, och normeras genom att delas med $\sqrt{2}$. Alltså,

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Beräkna tangenplanet till funktionen $f(x,y) = xy + \sin(x-y)$ i punkten $(1,1)$. Använd detta plan till att approximera $f(x,y)$ i punkten $(1.1, 1.2)$.

   Lösning: Tangenplanet ges av

$$\begin{aligned} T(x,y) &= f(1,1) + \nabla f(1,1)\cdot(x-1,y-1) \\ &= 1 + (y+\cos(x-y), x-\cos(x-y))|_{(x,y)=(1,1)}\cdot(x-1,y-1) \\ &= 1 + (2,0)\cdot(x-1,y-1) = 1 + 2(x-1) = 2x-1. \end{aligned}$$

   Approximationen av $f(1.1,1.2)$ blir därför $T(1.1,1.2) = 1+0.2 = 1.2$.

4. Visa att $3xy^2 + 1 \geq 0$ på området $x^2 + 2y^2 \leq 1$.

   Lösning: Betrakta det minsta värde $f(x,y) = 3xy^2+1$ antar på området. I det inre måste ett eventuellt minimum antas i punkt där $\nabla f = 0$. Vi får $0 = \nabla f = (3y^2, 6xy)$, vilket ger att $y = 0$ och x godtycklig. För dessa punkter är $f(x,0) = 1 \geq 0$.

   På randen gäller $y^2 = (1-x^2)/2$, så funktionen blir då

$$g(x) = f(x,(1-x^2)/2) = 3x(1-x^2)/2 + 1 = \frac{3}{2}(x-x^3)+1.$$

   Kritisk punkt då $0 = g(x) = 3(1-3x^2)/2$, det vill säga för $x = \pm 1/\sqrt{3}$. Funktionsvärdet blir då

$$g(\pm 1/\sqrt{3}) = \pm\frac{3}{2\sqrt{3}}(1-1/3)+1 = \pm\frac{3}{2\sqrt{3}}\frac{2}{3}+1 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}+1 \geq 0.$$

   Olikheten är därmed visad.

5. Bestäm

$$\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

   där D är området begränsat av $y = \sqrt{1-x}$, $y = \sqrt{1+x}$ och $y = 0$.

   Lösning: Begränsningsparablerna kan skrivas $x = 1-y^2$ och $x = y^2-1$. Dessa skär varandra i $(x,y) = (0,1)$, eftersom $1-y^2 = y^2-1$ bara har en positiv lösning $y = 1$. För varje y sådant att $0 \leq y \leq 1$ gäller då $y^2 - 1 \leq x \leq 1 - y^2$. Således får vi

$$\begin{aligned}
\iint_D y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int\limits_{y=0}^{1} y \int\limits_{x=y^2-1}^{1-y^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int\limits_{y=0}^{1} 2(1-y^2)y\,\mathrm{d}y \\
&= 2\int\limits_{y=0}^{1} (y - y^3)\,\mathrm{d}y \\
&= 2\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

6. Ytan S är den del av $f(x, y) = 1 - x^2/2$ som ligger ovanför kvadraten $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Beräkna

$$\iint_S xy^2 \,\mathrm{d}S$$

över ytan S.

Lösning: Vi har

$$\mathrm{d}S = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Därmed får vi

$$\begin{aligned}
\iint_S xy^2\,\mathrm{d}S &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \sqrt{x^2+1}xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int\limits_0^1 y^2\,\mathrm{d}y \int\limits_0^1 \sqrt{x^2+1}x\,\mathrm{d}x = \left\{u = x^2,\ \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x\right\} \\
&= \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sqrt{u+1}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{6}\left[\frac{2(u+1)^{3/2}}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{9}(2^{3/2} - 1).
\end{aligned}$$

7. Beräkna kurvintegralen

$$\oint_\Gamma (\sin x - y^3)\,\mathrm{d}x + (x^3 + \cos y)\,\mathrm{d}y$$

ett varv moturs kring enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$.

Lösning: Greens formel ger

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma (\sin x - y^3)\,\mathrm{d}x + (x^3 + \cos y)\,\mathrm{d}y &= \iint_C (3x^2 + 3y^2)\,\mathrm{d}A \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} 3r^2 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= 6\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

8. Visa att funktionen $f(x, y) = (1 + \mathrm{e}^y)\cos x - y\mathrm{e}^y$ har oändligt många maximipunkter, men saknar minimipunkter.

Lösning: Kritiska punkter finner vi då

$$0 = \nabla f = (-(1 + \mathrm{e}^y)\sin x, \mathrm{e}^y(\cos x - 1 - y))$$

vilket ger $x = n\pi$ och $y = (-1)^n - 1$, där n är ett godtyckligt heltal.

Punkternas karaktär bestäms genom att titta på andraderivatorna. Vi får

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -(1 + \mathrm{e}^y)\cos x; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -\mathrm{e}^y \sin x; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \mathrm{e}^y(\cos x - 2 - y).\end{aligned}$$

För jämna $n = 2k$ får vi

$$\begin{aligned}A &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2k\pi, 0) = -2; \\ B &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2k\pi, 0) = 0; \\ C &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2k\pi, 0) = -1,\end{aligned}$$

så $AC - B^2 = 2 > 0$ och $A < 0$ ger att alla dessa är maximipunkter. För udda $n = 2k + 1$ får vi

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}((2k+1)\pi, -2) = 1 + \mathrm{e}^{-2}; \\ B &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}((2k+1)\pi, -2) = 0; \\ C &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}((2k+1)\pi, -2) = -\mathrm{e}^{-2}, \end{aligned}$$

så $AC - B^2 = -\mathrm{e}^{-2}(1 + \mathrm{e}^{-2}) < 0$ ger att alla dessa är sadelpunkter. Några minimipunkter finns därmed inte.

9. Bestäm en ortogonal bas till kolonnrummet till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix},$$

samt en bas för det ortogonala komplementet till kolonnrummet.

Lösning: Vi använder Gram-Schmidts metod. Låt de tre kolonnerna i A vara $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ och $\boldsymbol{u}_3$. Vi får då

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{u}_1 = (-1, 3, 1, 1) \\ \boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{u}_2 - \frac{\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1 = (6, -8, -2, -4) + 3(-1, 3, 1, 1) = (3, 1, 1, -1) \\ \boldsymbol{v}_3 &= \boldsymbol{u}_3 - \frac{\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1 - \frac{\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_2\|^2}\boldsymbol{v}_2 \\ &= (6, 3, 6, -3) - \frac{1}{2}(-1, 3, 1, 1) - \frac{5}{2}(3, 1, 1, -1) = (-1, -1, 3, -1). \end{aligned}$$

Dessa normeras sedan genom att delas med $2\sqrt{3}$.

Det ortogonala komplementet består av nollrummet till A^T. Detta rum har dimension $4 - 3 = 1$, och radreducering ger att en nollskild vektor i detta nollrum är $(-1, 1, -1, -3)$.

10. En rätvinklig container med sidlängderna x, y och z är märkt med volymen $6\mathrm{m}^3$. Kan det stämma, om avståndet mellan de diametralt motsatta hörnen är $3\mathrm{m}$?

Lösning: Volymen är $V(x, y, z) = xyz$ och bivillkoret kan skrivas $x^2 + y^2 + x^2 = 9$. För att hitta maximal volym definierar vi Lagrangefunktionen $L(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$ och sätter $\nabla L = 0$. Då fås

$$\begin{cases} yz + 2x\lambda = 0 \\ xz + 2y\lambda = 0 \\ xy + 2z\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9. \end{cases}$$

Om man löser ut λ ur var och en av de tre första ekvationer får vi

$$\frac{-yz}{2x} = \frac{-xz}{2y} = \frac{-xy}{2z},$$

vilket för positiva x, y, x har lösningen $x = y = z$. Insatt i sista ekvationen ger det $x = y = z = \sqrt{3}$.

Volymen blir då $3\sqrt{3} < 6$, så containern var uppenbarligen felmärkt.

Mindre tenta

11. Lös initialvärdesproblemet $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ för

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

givet att $\boldsymbol{x}(0) = (5, 1)^{\mathrm{T}}$.

Lösning: Egenvärdena beräknas genom

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-2-\lambda)(4-\lambda) + 5 \\ &= (\lambda - 3)(\lambda + 1). \end{aligned}$$

Egenvärdena är således 3 och -1. Ekvationerna $(A - \lambda I)\boldsymbol{v} = 0$ för dessa värden löses av $\boldsymbol{v}_1 = (1, -1)^T$ och $\boldsymbol{v}_2 = (5, -1)^T$.

Den generella lösningen blir då

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}.$$

För $t = 0$ fås

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix},$$

som löses av $c_1 = -5/2$ och $c_2 = 3/2$. Problemet löses alltså av

$$\boldsymbol{x}(t) = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} - \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}.$$

12. Vektorn $\boldsymbol{x} = (1, 2)^T$ i standardbasen ska skrivas i basen

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Gör detta med hjälp av en basbytesmatris.

Lösning: Basbytesmatrisen från B' till standardbasen ges av

$$P = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

och bytet åt andra hållet av dess invers. Vi får

$$P^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

och därmed fås

$$[\boldsymbol{x}]_{B'} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

13. Låt $f(x, y) = x^2/2 + 2xy - 2y^2$. Definiera $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ för $x(u, v) = u + v$ och $y(u, v) = u + 2v$. Beräkna ∇g med hjälp av kedjeregeln.

    Lösning: Kedjeregeln ger

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ &= (x + 2y) + (2x - 4y) \\ &= 3x - 2y = 3(u + v) - 2(u + 2v) = u - v \end{aligned}$$

    och

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \\ &= (x + 2y) + 2(2x - 4y) \\ &= 5x - 6y = 5(u + v) - 6(u + 2v) = -u - 7v. \end{aligned}$$

    Alltså har vi $\nabla g = (u - v, -u - 7v)$.

14. Ett fönster med bredden $2x$ består av en rektangel med höjd y och ovanpå denna en halvcirkel med radie x. Bestäm fönstrets största möjliga area, om vi vet att dess omkrets är $4 + \pi$.

    Lösning: Arean av fönstret ges av $A(x, y) = 2xy + \pi x^2/2$. Omkretsen ges av $O(x, y) = 2x + 2y + \pi x$. Vi ska alltså maximera $A(x, y)$ under bivillkoret $2x+2y+\pi x-4-\pi = 0$. Lagrangefunktionen är $L(x, y, \lambda) = 2xy + \pi x^2/2 + \lambda(2x + 2y + \pi x)$, villket ger att maxpunkten måste uppfylla $0 = \nabla L = (2y + \pi x + 2\lambda + \pi\lambda, 2x + 2\lambda, 2x + 2y + \pi x - 4 - \pi)$.

Andra komponenten ger $x = -\lambda$. Stoppas detta in i första komponenten fås $y = -\lambda$. Dessa instoppade i tredje komponenten ger $x = y = 1$. Eftersom fönstrets area är begränsad under det givna bivillkoret följer att extremvärdet måste vara ett maxvärde. Den största arean blir $A(1,1) = 2 + \pi/2$.

15. Beräkna

$$\int_{y=0}^{2} \int_{x=y/2}^{1} \sin(\pi x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Lösning: Vi byter integrationsordning. Genom att rita området ser vi att gränserna blir $0 \le x \le 1$ och $0 \le y \le 2x$. Alltså fås

$$\begin{aligned}
\int_{y=0}^{2} \int_{x=y/2}^{1} \sin(\pi x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{2x} \sin(\pi x^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{1} \sin(\pi x^2) 2x\,\mathrm{d}x = \left\{u = x^2,\ \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x\right\} \\
&= \int_{x=0}^{1} \sin(\pi u)\,\mathrm{d}u = \left[\frac{-\cos(\pi u)}{\pi}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

16. Bestäm flödet av fältet $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (z^2 \sin(y^2), \mathrm{e}^{x^3}, y^2 + z^2)$ ut ur halvklotet $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$, $z \ge 0$.

Lösning: Flödet ur ut halvklotet ges enligt Gauss sats av integralen av $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ över halvklotet. Vi får $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0 + 0 + 2z$. Övergång till sfäriska koordinater ger

$$
\begin{aligned}
\iint_S (z^2 \sin(y^2), \mathrm{e}^{x^3}, y^2 + z^2) \cdot \, \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \iiint_K 2z \, \mathrm{d}V \\
&= \int\limits_{\theta=0}^{2\pi} \int\limits_{\rho=0}^{2} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi/2} 2\rho \cos\varphi \rho^2 \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta \\
&= 4\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^2 \int\limits_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos\varphi \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \\
&= 16\pi \int\limits_{u=0}^{1} u \, \mathrm{d}u = 8\pi.
\end{aligned}
$$

Det sista variabelbytet var $u = \sin\varphi$.