MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Analys och linjär algebra C för K, Kf och Bt, TMV035C, 10 januari 2009, 14.00–18.00.
Telefonjour: Jacob Sznajdman, 0762 - 721860
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna. Exempelvis är räknedosa inte tillåten.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt. Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan kommer att lämnas på kurshemsidan.
Lycka till!

Den ordinarie tentan, för de som inte gjort hemtalen under kursomgången 07–08, består av samtliga nedanstående tal. Gränsen för godkänt är 22 poäng. Preliminära gränser för högre betyg är 29 poäng för fyra och 36 poäng för femma.

De som har gjort hemtalen ska enbart göra uppgifterna 1-7. De som har godkänt på alla hemtalsomgångar gör 6 av dessa uppgifter, och väljer själva vilka som görs. De som har godkänt på nästan alla hemtalsomgångar gör samtliga 7 uppgifter. Om det är hemtalsomgång k som inte klarats måste uppgift k klaras, och resterande 6 uppgifter räknas samman för poängen på tentan. Maximala antalet poäng på tentan är således 24, och gränsen för godkänt är 12. Den som siktar på högre betyg än vad tidigare prestationer i kursen (främst hemtalen) visat, får även göra den ordinarie tentan. Då räknas det bästa betyget.

---

1. Beräkna egenvärden och egenvektorer till matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$
(4p)

2. Verifiera att
$$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$
är en ortogonal mängd, och projicera sedan $\boldsymbol{x} = (3, 2, -4)^T$ på $U = \text{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$. (4p)

3. Ange tangentplanet till funktionen $f(x, y) = \sin(x^2 - y^2) + \cos(\pi x)$ i punkten $(2, -2, 1)$ och ge sedan ett ungefärligt värde för $f(2.1, -1.8)$. (4p)

Var god vänd!

4. Bestäm det största och minsta värdet av $f(x, y) = xy^2 - x^2 - y$ på rektangeln $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$. (4p)

5. Beräkna
$$\iint_D \frac{x}{1+y^2}\,\mathrm{d}A,$$
där D är området givet av $x^2 \leq y \leq 1, x \geq 0$. (4p)

6. Kroppen K ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y \geq 0, z \geq 0$. Beräkna
$$\iiint_K z\,\mathrm{d}V.$$
(4p)

7. Beräkna flödet av $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (4xz, -y^2, yz)$ ut genom enhetskuben, det vill säga
$$\iint_S (4xz, -y^2, yz) \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S,$$
där S begränsar området $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$. (4p)

8. Bestäm största möjliga volym för en låda vars botten och sidor har sammanlagd area 3. Locket räknas alltså inte till arean. Lådans sidor förutsätts vara parallella med koordinatplanen (räta vinklar i lådan). (6p)

9. Bestäm minsta-kvadrat-lösningen till systemet
$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 6; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0; \\ x_1 + x_2 &= 9; \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 3. \end{aligned}$$
(6p)

10. Beräkna kurvintegralen
$$\int_\Gamma (x^2 - y + 2\ln(1+y))\,\mathrm{d}x + \frac{(1+x)^2}{1+y}\,\mathrm{d}y,$$
där Γ är den övre halvan av enhetscirkeln medurs från $(-1, 0)$ till $(1, 0)$. (6p)

Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Niklas Eriksen

Tentamen i tmv035C, Analys och linjär algebra C för K, Kf och Bt
lösningar
2009-01-10

---

1. Beräkna egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Lösning: Egenvärdena beräknas genom

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & -\lambda & 4 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)(-\lambda(-2-\lambda) - 8) \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 8) \\ &= (3-\lambda)(\lambda+4)(\lambda-2). \end{aligned}$$

Egenvärdena är således $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -4$ och $\lambda_3 = 2$. Vi söker nu lösningar till ekvationerna $(A - \lambda_i I)\boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$ och får

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -11 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \end{pmatrix},$$

vilket ger $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,0)^T$. På samma sätt får vi

$$A + 4I = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vilket ger $\boldsymbol{v}_2 = (1, -7, 7)$ och

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vilket ger $\boldsymbol{v}_3 = (-5, 2, 1)^T$.

2. Verifiera att

$$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

är en ortogonal mängd, och projicera sedan $\boldsymbol{x} = (3, 2, -4)^T$ på $U = \text{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$.

Lösning: Eftersom $u_1 \cdot u_2 = -4 + 2 + 2 = 0$ är vektorerna ortogonala. Vid projektionen gäller att vi ska projicera på var och en av basvektorerna, det vill säga

$$\begin{aligned} \text{proj}_U \boldsymbol{x} &= \text{proj}_{\boldsymbol{u}_1} \boldsymbol{x} + \text{proj}_{\boldsymbol{u}_2} \boldsymbol{x} \\ &= \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_1}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2} \boldsymbol{u}_1 + \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_2}{\|\boldsymbol{u}_2\|^2} \boldsymbol{u}_2 \\ &= \frac{-12}{21}(-4, 2, 1)^T + \frac{-3}{6}(1, 1, 2)^T \\ &= \frac{1}{14}(25, -23, -22). \end{aligned}$$

Vi kan verifiera att lösningen är en projektion genom att kontrollera att $\boldsymbol{x} - \text{proj}_U \boldsymbol{x} = 17 * (1, 3, -2)/14$ är vinkelrät mot $\boldsymbol{u}_1$ och $\boldsymbol{u}_2$.

3. Ange tangentplanet till funktionen $f(x, y) = \sin(x^2 - y^2) + \cos(\pi x)$ i punkten $(2, -2, 1)$ och ge sedan ett ungefärligt värde för $f(2.1, -1.8)$.

Lösning: Tangentplanet i punkten $(a, b, f(a, b))$ ges av $z = f(a, b) + f_1'(a, b)(x - a) + f_2'(a, b)(y - b)$. Genom att derivera partiellt får vi $f_1'(x, y) = 2x \cos(x^2 - y^2) - \pi \sin(\pi x)$ och $f_2'(x, y) = -2y \cos(x^2 - y^2)$, och därmed $z = 1 + 4(x - 2) + 4(y + 2)$. Ett ungefärligt värde för $f(2.1, -1.8)$ ges av planets värde i denna punkt, vilket är $z = 1 + 4 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.2 = 2.2$.

4. Bestäm det största och minsta värdet av $f(x, y) = xy^2 - x^2 - y$ på rektangeln $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$.

Lösning: I det inre av triangeln måste ett eventuellt extremvärde antas i punkter där $\nabla f = 0$. Vi får $0 = \nabla f = (y^2 - 2x, 2xy - 1)$, vilket ger

$x = y^2/2 \Rightarrow 1 = 2xy = y^3$, och därmed $(x, y) = (1/2, 1)$. Denna punkt ligger inuti det givna området och är således en kritisk punkt.

Vi delar upp randen i 4 delar, som ges av $x = 0$ respektive $x = 1$ för $0 \leq y \leq 2$, samt $y = 0$ respektive $y = 2$ för $0 \leq x \leq 1$. I första fallet får vi $g_1(y) = f(0, y) = -y$, som saknar extremvärden i det inre av $0 \leq y \leq 2$. Det andra fallet ger $g_2(y) = f(1, y) = y^2 - 1 - y$, vars derivata är $g_2'(y) = 2y - 1$. Vi får $g_2'(y) = 0$ för $y = 1/2$, så $(1, 1/2)$ är en kritisk punkt. Vi har även $g_3(x) = f(x, 0) = -x^2$ utan extremvärden i intervallets inre och $g_4(x) = f(x, 2) = 4x - x^2 - 2$, med derivatan $g_4'(x) = 4 - 2x$, vars nollställe hamnar utanför $0 \leq x \leq 1$.

Kritiska punkter är således $(1/2, 1)$ och $(1, 1/2)$ samt hörnen. Beräknas värdet i dessa punkter får vi $f(1/2, 1) = -3/4$, $f(1, 1/2) = -5/4$, $f(0, 0) = 0$, $f(0, 2) = -2$, $f(1, 0) = -1$ samt $f(1, 2) = 1$. Störst är alltså 1 och minst -2.

5. Beräkna

$$\iint_D \frac{x}{1+y^2}\,\mathrm{d}A,$$

där D är området givet av $x^2 \leq y \leq 1, x \geq 0$.

Lösning: Integralen löses genom

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{x}{1+y^2}\,\mathrm{d}A &= \int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{\sqrt{y}} \frac{x}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2(1+y^2)}\right]_0^{\sqrt{y}} \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{y}{(1+y^2)}\,\mathrm{d}y \\
&\quad \left\{t = y^2, \quad \mathrm{d}t = 2y\mathrm{d}y\right\} \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\left[\ln(1+t)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{4}.
\end{aligned}$$

6. Kroppen K ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y \geq 0, z \geq 0$. Beräkna

$$\iiint_K z\,\mathrm{d}V.$$

Lösning: Vi går över till sfäriska koordinater. I detta fall har vi $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$ och $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Vi får

$$\begin{aligned}
\iiint_K z \,\mathrm{d}V &= \int_{\rho=0}^{1} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \rho \sin(\varphi) \rho^2 \cos(\varphi) \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\rho \\
&= \int_{\rho=0}^{1} \rho^3 \,\mathrm{d}\rho \int_{\theta=0}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \frac{\sin(2\varphi)}{2} \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \pi \left[\frac{-\cos(2\varphi)}{4}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{16}(1+1) = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

7. Beräkna flödet av $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (4xz, -y^2, yz)$ ut genom enhetskuben, det vill säga

$$\iint_S (4xz, -y^2, yz) \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S,$$

där S begränsar området $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.

Lösning: Vi använder Gauss sats och får

$$\begin{aligned}
\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S &= \iiint_K \nabla \cdot \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}V \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (4z - 2y + y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \int_0^1 (4z - y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 4z \,\mathrm{d}z - \int_0^1 y \,\mathrm{d}y \\
&= 2 - 1/2 = 3/2.
\end{aligned}$$

8. Bestäm största möjliga volym för en låda vars botten och sidor har sammanlagd area 3. Locket räknas alltså inte till arean. Lådans sidor förutsätts vara parallella med koordinatplanen (räta vinklar i lådan).

Lösning: Om vi lägger ett av hörnen i bottenplattan i origo och det bortesta hörnet i (x,y,z) så ges volymen av $V(x,y,z) = xyz$ och arean av $A(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz = 3$. Vi ska således maximera $V(x,y,z)$ under bivillkoret $A(x,y,z) - 3 = 0$ och tar till Lagrange.

Låt

$$\begin{aligned}
L(x,y,z,\lambda) &= V(x,y,z) + \lambda(A(x,y,z) - 3) \\
&= xyz + \lambda(xy + 2xz + 2yz - 3).
\end{aligned}$$

Sätter vi ∇L till noll får vi således ekvationerna

$$\begin{aligned} yz + \lambda y + 2\lambda z &= 0; \\ xz + \lambda x + 2\lambda z &= 0; \\ xy + 2\lambda x + 2\lambda y &= 0; \\ xy + 2xz + 2yz - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Den första minus den andra av dessa ger $(y - x)(z + \lambda) = 0$, vilket innebär att minst en av $y = x$ och $z = -\lambda$ är sann. Den senare likheten ger insatt i första ekvationen $2\lambda z = 0$ som inte är intressant, eftersom $z = 0$ ger att volymen är noll.

Vi antar således $x = y$. Den tredje ekvationen ger då $x^2 + 4x\lambda = 0$ och eftersom vi kan anta $x > 0$ får vi $x = y = -4\lambda$. Första ekvationen ger då genast $z = -2\lambda = x/2$. Allt insatt i sista ekvationen ger $48\lambda^2 = 3 \Rightarrow \lambda = \pm 1/4$. Genom att insistera på positiva koordinater får vi således $x = y = 1$, $z = 1/2$. Volymen blir då $1/2$.

9. Bestäm minsta-kvadrat-lösningen till systemet

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 6; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0; \\ x_1 + x_2 &= 9; \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Lösning: Betrakta problemet på matrisform $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Minsta-kvadrat-lösningen ges då av lösningen till $A^T A\boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{b}$. Vi får

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -6 \\ 4 & 3 & -3 \\ -6 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

och

$$A^T \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Gausselinimation av systemet $(A^T A | A^T \boldsymbol{b})$ ger nu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 4 & -6 & 18 \\ 4 & 3 & -3 & 12 \\ -6 & -3 & 6 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 0 & -6 \\ 4 & 3 & -3 & 12 \\ 1 & 1 & 0 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 0 & -6 \\ 4 & 3 & -3 & 12 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right),$$

vilket ger $\boldsymbol{x}^T = (12, -3, 9)$.

10. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\Gamma (x^2 - y + 2\ln(1+y))\,\mathrm{d}x + \frac{(1+x)^2}{1+y}\,\mathrm{d}y,$$

där Γ är den övre halvan av enhetscirkeln medurs från $(-1, 0)$ till $(1, 0)$.

Lösning: Vi sluter kurvan med linjen σ given av $y = 0$ och x gående från 1 till -1. Sätter vi $P(x, y) = x^2 - y + 2\ln(1+y)$ och $Q(x, y) = (1+x)^2/(1+y)$ gäller enligt Greens formel

$$\begin{aligned}\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y &= \int_{\Gamma+\sigma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y - \int_\sigma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y \\ &= -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_\sigma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

där D är övre halvan av enhetscirkelskivan. Minustecknet följer av att kurvan runt D har negativ orientering.

Vi har

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2(1+x)}{1+y}$$

och

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2}{1+y} - 1.$$

Således får vi

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(1 + \frac{2x}{1+y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi/2,$$

eftersom den första termen i integranden ger arean av området D och den senare är en udda funktion i x på ett symmetriskt intervall, vilket ger integralen 0.

Dessutom har vi

$$\int_\sigma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{x=1}^{-1} x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^{-1} = -\frac{2}{3}.$$

Sammanlagt blir kurvintegralen

$$-\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4 - 3\pi}{6}.$$