Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Niklas Eriksen

Tentamen i tmv036C och tmv035C,
Analys och linjär algebra C för K, Kf och Bt
Lösningar
2009-08-29

---

1. Bestäm egenvärdena och en valfri egenvektor till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Lösning: Egenvärdena beräknas som lösningar till ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$. Vi får

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)((-1-\lambda)(-4-\lambda)+2) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2+5\lambda+6) = (1-\lambda)(2+\lambda)(3+\lambda) \end{aligned}$$

Egenvärdena är således 1, -2 och -3. En egenvektor till $\lambda = 1$ ges av en icke-trivial lösning till systemet $(A - I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Vi förenklar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right),$$

vilket motsvarar ekvationerna $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ och $x_2 - 3x_3 = 0$. En egenvektor är således $(-4, 3, 1)^T$.

2. Lös initialvärdesproblemet $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ för

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 8 & -5 \end{pmatrix},$$

givet att $\boldsymbol{x}(0) = (3,4)^{\mathrm{T}}$.

Lösning: Egenvärdena beräknas genom

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 \\ 8 & -5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (7-\lambda)(-5-\lambda) + 32 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 3 \\ &= (\lambda+1)(\lambda-3). \end{aligned}$$

Egenvärdena är således -1 och 3. Ekvationerna $(A - \lambda I)\boldsymbol{v} = 0$ för dessa värden löses av $\boldsymbol{v}_1 = (1,2)^T$ och $\boldsymbol{v}_2 = (1,1)^T$.

Den generella lösningen blir då

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}.$$

För $t = 0$ fås

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

som löses av $c_1 = 2$ och $c_2 = 1$. Problemet löses alltså av

$$\boldsymbol{x}(t) = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}.$$

3. I leken *Gömma nyckel* gömmer en av deltagarna (A) en nyckel, varefter den andra deltagaren (B) ska leta rätt på nyckeln. Som ledtrådar anger A *fågel*, *fisk* eller *mittemellan* för att ange nyckelns höjd (högt, lågt, mitten), samt om det det blir varmare respektive kallare om B närmar sig nyckeln eller avlägsnar sig från den.

   (a) Deltagare B går i riktningen $(3,1)$ men får genast besked att det blir kallare. B återvänder då till startpunkten och går i riktningen $(3,2)$. Då blir det till en början varken varmare eller kallare. I vilken riktning skulle B ha gått för att komma direkt till nyckeln?

   (b) Deltagare B pekar i riktningen $(1,2,3)$ och undrar om det blir varmare eller kallare i denna riktning? Svaret blir åter att det varken blir varmare eller kallare. Fågel, fisk eller mittemellan?

   Lösning:

(a) Det framgår att $(3,2)$ tangerar en nivåkurva till värmefunktionen, så gradientens riktning, som vi söker, är vinkelrät mot $(3,2)$. Riktningen är således antingen $(-2,3)$ eller $(2,-3)$. Eftersom $(-2,3)\cdot(3,1) = -6+3 = -3 < 0$ och värmen avtog i riktningen $(3,1)$ är $(-2,3)$ den rätta riktningen.

(b) I tre dimensioner är gradienten $(-2,3,a)$. Eftersom $(-2,3,a)\cdot(1,2,3) = -2+3+3a = 1+3a = 0$ följer att $a < 0$. Svaret blir således fisk!

4. Receptsamlingen *En miljon lätta menyer* av Kerstin Wachtmeister bygger på att ett antal förrätter, varmrätter och efterrätter kombineras så att antalet kombinationer blir en miljon. Låt antalet förrätter vara x, antalet varmrätter vara y och antalet efterrätter vara z. Bestäm det minsta antalet rätter som behövs för att antalet menyer ska bli en miljon, det vill säga minimera $f(x,y,z) = x+y+z$ givet att $xyz = 1\,000\,000$.

   Lösning: Bivillkoret $g(x,y,z) = xyz - 10^6 = 0$ kombineras med den funktion $f(x,y,z)$ som ska minimeras i Lagrangianen

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) = x+y+z+\lambda(xyz - 10^6).$$

   Optimalitetsvillkoret $\nabla L(x,y,z,\lambda) = \mathbf{0}$ ger

$$\begin{aligned} 1+\lambda yz &= 0;\\ 1+\lambda xz &= 0;\\ 1+\lambda xy &= 0;\\ xyz - 10^6 &= 0. \end{aligned}$$

   Första ekvationen ger $0 = x+\lambda xyz = x+10^6\lambda$ och på samma sätt följer att $0 = y+10^6\lambda = z+10^6\lambda$ från andra och tredje ekvationen. Vi drar slutsatsen att $x = y = z$ och därmed att $x^3 = 10^6$, vilket ger $x = 100$. Antalet rätter minimeras således av $x+y+z = 100+100+100 = 300$, vilket är det antal rätter som ges i receptsamlingen.

5. Beräkna

$$\int_{\mathrm{D}} \frac{x+y}{2+x-y}\,\mathrm{d}A$$

   över kvadraten given av $0 \le x+y \le 2$ och $-1 \le x-y \le 1$. Använd gärna ett lämpligt variabelbyte.

Lösning: Området och integranden blir båda förenklade om vi genomför variabelbytet $u = x + y$ och $v = x - y$. Området blir då $0 \leq u \leq 2$ och $-1 \leq v \leq 1$. Dessutom gäller

$$|\left|\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(u,v)}\right|| = |\frac{1}{\left|\frac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(x,y)}\right|}| = |\frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}| = |\frac{-1}{2}| = \frac{1}{2}.$$

Vi får

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{D}} \frac{x+y}{2+x-y}\,\mathrm{d}A &= \int_{u=0}^{2}\int_{v=-1}^{1} \frac{u}{2+v}|\left|\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(u,v)}\right||\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int_{u=0}^{2} u\,\mathrm{d}u \int_{v=-1}^{1} \frac{1}{2+v}\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^2 [\ln(2+v)]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{4}(4-0)(\ln 3 - \ln 1) = \ln 3.
\end{aligned}$$

6. Visa att området D givet av $x^2 + y^2 \leq y$, $x \geq 0$ i polära koordinater kan skrivas som $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq r \leq \sin\theta$ och beräkna sedan

$$\iint_{\mathrm{D}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}A$$

över området D.

Lösning: Eftersom $0 \leq x^2 + y^2 \leq y$ och $0 \leq x$ befinner vi oss i första kvadranten, det vill säga $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Omvandlar vi sedan $x^2+y^2 \leq y$ till polära koordinater får vi $r^2 \leq r\sin\theta$, vilket ger $0 \leq r \leq \sin\theta$.

Genom att gå över till polära koordinater löses integralen:

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathrm{D}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}A &= \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{\sin\theta} r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{\sin^3(\theta)}{3}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_{\theta=0}^{\pi/2} (1-\cos^2(\theta))\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&\quad \{u=\cos\theta,\ \mathrm{d}u = -\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\} \\
&= \frac{-1}{3}\int_{u=1}^{0} (1-u^2)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{3}\left[u-\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{9}
\end{aligned}$$

7. Visa att fältet

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(\frac{y^2\mathrm{e}^z}{z}, \frac{2xy\mathrm{e}^z}{z}, \frac{xy^2\mathrm{e}^z(z-1)}{z^2}\right)$$

är konservativt på området $z>0$, och beräkna kurvintegralen

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

där Γ är den räta linjen från $(1,2,1)$ till $(3,3,1)$.

Lösning: Vi söker en potential till $\boldsymbol{F}$. Av första komponenten följer

$$\Phi = \frac{xy^2\mathrm{e}^z}{z} + g(y,z).$$

Vi deriverar med avseende på y och jämför med andra komponenten i $\boldsymbol{F}$:

$$\frac{2xy\mathrm{e}^z}{z} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{2xy\mathrm{e}^z}{z} + \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Vi inser att $g(y,z)$ är oberoende av y och därmed $g(y,z) = h(z)$. Slutligen fortsätter vi med tredje komponenten och får

$$\frac{xy^2\mathrm{e}^z(z-1)}{z^2} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = xy^2\frac{(\mathrm{e}^z z-\mathrm{e}^z)}{z^2} + h'(z) = \frac{xy^2\mathrm{e}^z(z-1)}{z^2} + h'(z),$$

varur följer att $h(z) = C$. Fältet är således konservativt, med potentialen

$$\Phi(x,y,z) = \frac{xy^2\mathrm{e}^z}{z} + C.$$

Vi har nu

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = [\Phi(x,y,z)]_{(1,2,1)}^{(3,3,1)} = \Phi(3,3,1)-\Phi(1,2,1) = \mathrm{e}(27-4) = 23\mathrm{e}.$$

8. Beräkna flödet av $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (y, x+z, z)$ ut genom klotet $x^2+y^2+z^2 \le 4$.

   Lösning: Vi använder Gauss sats och får

$$\begin{aligned}\iint_{\partial K} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S &= \iiint_K \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V \\ &= \iiint_K \mathrm{d}V \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{2} \rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 [-\cos\varphi]_0^\pi = \frac{32\pi}{3}.\end{aligned}$$

9. Bestäm och klassificera samtliga lokala extremvärden till funktionen

$$f(x,y) = (x+y)^2 + x^3 + x^2y - xy^2 - y^3.$$

   Lösning: Eftersom funktionen är deriverbar överallt söker vi punkter där gradienten är noll. Vi får

$$\mathbf{0} = \nabla f = (2(x+y)+3x^2+2xy-y^2, 2(x+y)+x^2-2xy-3y^2),$$

   vilket ger $3x^2+2xy-y^2 = -2(x+y) = x^2-2xy-3y^2$. Samlar vi alla termer på samma sida får vi $0 = 2x^2+4xy+2y^2 = 2(x+y)^2$, med resultatet $y=-x$. Vi finner att nollställena till ∇f ges av $y=-x$; en oändlig mängd punkter.

   För att klassificera dessa beräknar vi Hessianen:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6x+2y & 2+2x-2y \\ 2+2x-2y & 2-2x-6y \end{pmatrix}.$$

   För våra punkter har vi

$$H(x,-x) = \begin{pmatrix} 2+4x & 2+4x \\ 2+4x & 2+4x \end{pmatrix},$$

vars determinant $AC-B^2$ blir 0. Vi kan alltså inte dra några slutsatser av Hessianen.

Vi faktoriseras funktionen till $f(x,y) = (x+y)^2(1+x-y)$. Då får vi att

$$f(x+h,-x+k) - f(x,-x) = (h+k)^2(1+2x+h-k).$$

Den första faktorn är en jämn kvadrat, så tecknet på den andra faktorn avgör tecknet på hela differensen. Om $1+2x<0$ blir tecknet negativt (lokalt minimum), om $1+2x>0$ blir tecknet positivt (lokalt maximum) och om $1+2x=0$, det vill säga $(x,y)=(-1/2,1/2)$, har vi en sadelpunkt.

10. När man bygger pyramider bör man lägga de tyngsta stenarna så långt ner som möjligt, gärna nära mitten. En pyramid har byggts med hörn i $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(-1,0,0)$, $(0,-1,0)$ och $(0,0,2)$ med densitet $f(x,y,z) = 1/(1+|x|+|y|+|z|)^3$. Vad väger pyramiden?

    Lösning: Vikten beräknas genom att vi integrerar densiteten över hela kroppen. Vi börjar med att finna områdets begränsningar. Pyramiden har sin bottenplatta i planet $z=0$, och plattan bildar en kvadrat symmetrisk i såväl x- som y-led. Toppen på pyramiden befinner sig ovan bottenplattans mittpunkt. Hela pyramiden är således symmetrisk i x- och y-led, och eftersom funktionen är jämn i dessa riktningar kan vi begränsa oss till $x,y\geq 0$, som ger en fjärdedel av vikten.

    I xy-planet har vi begränsningarna $0\leq x\leq 1$ och $0\leq y\leq 1-x$. Det plan som går genom punkterna $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ och $(0,0,2)$ är $2x+2y+z=2$, så $0\leq z\leq 2-2x-2y$.

Vi får pyramidens vikt till

$$
\begin{aligned}
4\iiint_{\mathrm{K}} \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\,\mathrm{d}V &= 4\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\int_{z=0}^{2-2x-2y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= 4\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x} \left[\frac{-1}{2(1+x+y+z)^2}\right]_0^{2-2x-2y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x} \left(\frac{-1}{(3-x-y)^2}+\frac{1}{(1+x+y)^2}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{x=0}^{1} \left[\frac{-1}{3-x-y}+\frac{-1}{1+x+y}\right]_0^{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{x=0}^{1} \left(\frac{-1}{2}+\frac{1}{3-x}+\frac{-1}{2}+\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x \\
&= 2\left[x-\ln|3-x|+\ln|1+x|\right]_0^1 \\
&= 2\left(1-\ln 2+\ln 2-0+\ln 3-\ln 1\right) = 2(1+\ln 3).
\end{aligned}
$$

11. Ytan Y beskriven av $x^2+y^2+2(z-1)^2=6$, $z \geq 0$ är övre delen av en avskuren ellipsoid. Beräkna

$$\iint_{\mathrm{Y}} (\nabla \times \boldsymbol{F})\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S,$$

där normalen $\boldsymbol{n}$ är uppåtriktad och

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (xz - y^3\cos z, x^3\mathrm{e}^z, xyz\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}).$$

Lösning: Stokes sats säger att

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_{\mathrm{Y}} (\nabla \times \boldsymbol{F})\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S,$$

där Γ är randkurvan till Y, genomlöpt moturs sett uppifrån.

Vi är dock inte tvungna att beräkna denna kurvintegral. Vi kan använda Stokes sats igen, denna gång med en annan yta som också har Γ som rand. Enklaste valet är förmodligen ytan i planet $z=0$ innanför Γ, som ges av att vi sätter $z=0$ i Y: $x^2+y^2+2=6$, det vill säga $x^2+y^2=4$. Ytan innanför är således $x^2+y^2 \leq 4$.

I $\nabla \times \boldsymbol{F}$ räcker det att beräkna tredje komponenten. Den ges av

$$\frac{\partial(x^3\mathrm{e}^z)}{\partial x} - \frac{\partial(xz-y^3\cos z)}{\partial y} = 3x^2\mathrm{e}^z + 3y^2\cos z,$$

vilket för $z = 0$ ger $3(x^2 + y^2)$.

Det värde vi söker är således

$$\begin{aligned}
\iint_{\Upsilon} (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S &= \int_{\Gamma} \boldsymbol{F} \cdot \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
&= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot (0,0,1) \, \mathrm{d}S \\
&= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (\ldots, \ldots, 3(x^2 + y^2)) \cdot (0,0,1) \, \mathrm{d}S \\
&= 3 \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}S \\
&= 3 \int_{r=0}^{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} r^3 \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r \\
&= 6\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 24\pi.
\end{aligned}$$