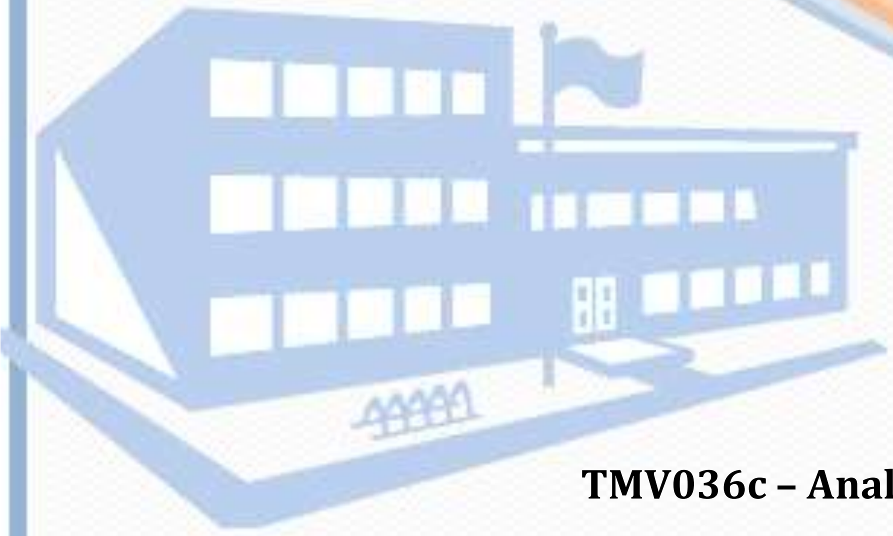

TMV036c – Analys och Linjär Algebra C

Satser med bevis 2011

Sammanställt av: David Frisk, 2013

David Frisk

Bevis ALA C 2011

1. Diagonalisering

SATS: En $n \times n$-matris A är diagonaliserbar om och endast om A har n st linjärt oberoende egenvektorer.

$A = PDP^{-1}$, eller $P^{-1}AP = D$, där D är en diagonalmatris.

$\Leftrightarrow$ kolonnerna i P är linjärt oberoende egenvektorer till A. I så fall är diagonalelementen i D motsvarande egenvärden till A.

BEVIS: Om P är en $n \times n$ matris med kolonner $v_1, \ldots, v_n$ och

D är en diagonalmatris med diagonalelement $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ så:

$$AP = A[v_1 \ldots v_n] = [Av_1 \ldots Av_n] \quad , \text{ medan} \qquad (1)$$

$$PD = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_1 v_1 \ \ldots \ \lambda_n v_n] \qquad (2)$$

* Antag att A är diagonaliserbar och $A = PDP^{-1}$, Då $AP = PDP^{-1}P = PD$.

Då ger (1) och (2) att

$$[Av_1 \ldots Av_n] = [\lambda_1 v_1 \ldots \lambda_n v_n] \quad \text{vilket ger} \qquad (3)$$

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \ , \ldots , \ Av_n = \lambda_n v_n \qquad (4)$$

Eftersom P är inverterbar måste kolonnerna $v_1 \ldots v_n$ vara linjärt oberoende.

A är diagonaliserbar $\Rightarrow$ A har n st linjärt oberoende egenvektorer.

* Antag att A har n st oberoende egenvektorer $v_1 \ldots v_n$ som svarar mot egenvärdena $\lambda_1 \ldots \lambda_n$. För $P = [v_1 \ldots v_n]$ och $D = \mathrm{diag}(\lambda_1 \ldots \lambda_n)$ får vi enligt (1)–(3) att $AP = PD$. Vidare, eftersom P är inverterbar (P:s kolonner linj ober.) är

$$A = PDP^{-1}$$

2. Kedjeregeln

SATS: Låt $z=f(x,y)$, där $x=u(s,t)$ och $y=v(s,t)$.

Antag (1) $u(a,b)=p$ och $v(a,b)=q$

(2) u, v har derivator i (a,b)

(3) f är differentierbar i (p,q)

Då har $z=w(s,t)=f(u(s,t),v(s,t))$ partiella derivator av lia ord m.a.p s och t i (a,b)

$z=f(x,y)=f(x,y)=f(u(s,t),v(s,t))$

$$\left.\frac{dw}{ds}\right|_{a,b}=\frac{\partial f}{\partial x}\Big(u(a,b),v(a,b)\Big)\cdot\frac{\partial u}{\partial s}(a,b)+\frac{\partial f}{\partial y}\Big(u(a,b),v(a,b)\Big)\cdot\frac{dv}{ds}(a,b)$$

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{a,b}=\frac{\partial f}{\partial x}\Big(u(a,b),v(a,b)\Big)\cdot\frac{du}{dt}(a,b)+\frac{df}{dy}\Big(u(a,b),v(a,b)\Big)\cdot\frac{\partial v}{\partial t}(a,b)$$

BEVIS: Räcker att bevisa $\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=a}=f_1(p,q)\cdot\frac{du}{dt}+f_2(p,q)\cdot\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=a}$

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=a}=\lim_{\sigma\to0}\frac{w(a+\sigma)-w(a)}{\sigma},\quad \frac{w(a+\sigma)-w(a)}{\sigma}=\frac{f(u(\sigma+a),v(\sigma+a))-f(u(a),v(a))}{\sigma}=$$

(f är differentierbar i (p,q).

$f(x,y)=f(p,q)+f_1(p,q)(x-p)+f_2(p,q)(y-q)+\sqrt{(\underbrace{x-p}_{h})^2+(\underbrace{y-q}_{k})^2}\cdot\rho(h,k)$

där $\rho(h,k)\xrightarrow{(h,k)\to(0,0)}0$.) Låt $x=u(\sigma+a)$ $y=v(\sigma+a)$ och betecknar

$h=x-p=u(\sigma+a)-u(a)$, $k=y-q=v(\sigma+a)-v(a)$)

$$=\frac{f_1(p,q)h+f_2(p,q)k+\sqrt{h^2+k^2}\,\rho(h,k)}{\sigma}=$$

$$=f_1(p,q)\frac{h}{\sigma}+f_2(p,q)\frac{k}{\sigma}+\sqrt{\left(\frac{h}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{k}{\sigma}\right)^2}\cdot\rho(h,k).$$ När $\sigma\to0$:

$$\frac{h}{\sigma}=\frac{u(\sigma+a)-u(a)}{\sigma}\longrightarrow u'(a)$$

$$\frac{k}{\sigma}=\frac{v(\sigma+a)-v(a)}{\sigma}\longrightarrow v'(a)$$

Eftersom $h=u(\sigma+a)-u(a)\to0$ då $\sigma\to0$ (ty u är kontinuerlig i a)

$k=v(\sigma+a)-v(a)\to0$ då $\sigma\to0$ har vi att

$\rho(h,k)\to0$ då $\sigma\to0$, Därför:

$$\frac{w(\sigma+a)-w(a)}{\sigma}\xrightarrow{\sigma\to0}f_1(p,q)\cdot u'(a)+f_2(p,q)\cdot v'(a)\quad\boxtimes$$

3. Pythagoras sats i $\mathbb{R}^n$

SATS: Två vektorer u och v i $\mathbb{R}^n$ är ortogonala mot varandra omm

$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

BEVIS: $\|u+v\|^2 = (u+v)\cdot(u+v) = u\cdot u + 2\cdot u\cdot v + v\cdot v = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,u\cdot v.$

Om u, v är ortogonala är $2u\cdot v = 0$, och vi får att

$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ $\boxtimes$

4. Ortogonal mängd

SATS Om $S = \{u_1, \dots u_p\}$ är en ortogonalmängd i $\mathbb{R}^n$ så är S en linjärt oberoende mängd vektorer. S är då en bas för underrummet i $\mathbb{R}^n$ som spänns upp av S.

BEVIS $S = \{u_1, \dots u_p\}$ – ortogonal mängd, dvs $u_i \cdot u_j = 0$ när $i \neq j$.

Betrakta $c_1 u_1 + \dots + c_p u_p = 0$ (1)

Skall visa att $c_1 = c_2 = \dots = c_p = 0$

Multiplicera (1) skalärt med u_1:

$c_1 u_1 u_1 + \dots + \underbrace{c_p u_p u_1}_{0} = 0$, eftersom $u_1 \cdot u_1 \neq 0$ måste $c_1 = 0$.

Multiplicera (1) skalärt med u_2:

$c_1 \underbrace{u_1 u_2}_{0} + c_2 u_2 u_2 + \dots + c_p \underbrace{u_p u_2}_{0} = 0$, eftersom $u_2 u_2 \neq 0$ måste $c_2 = 0$

På samma sätt visas att $c_3, c_4 \dots c_p = 0$.

Vi har $c_1 = c_2 = \dots = c_p = 0$, därför måste $u_1, \dots u_p$ vara linjärt oberoende.