FFM 332 Mekanik
David Frisk, davidfr@student.chalmers.se
Övningstenta 2010-05-28

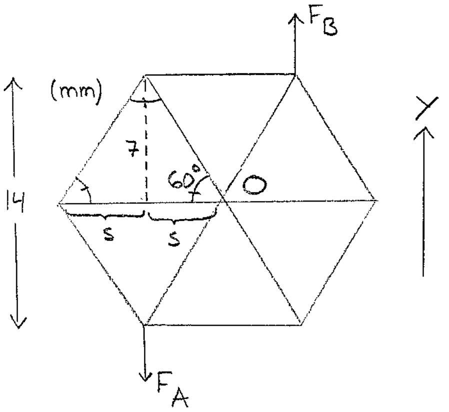
1. Sökt:
- Kraften P för att vrida bulten.
- Krafterna i kontaktpunkterna A och B.

Plan: Vi betraktar ett system som befinner sig i jämvikt vid så kallad impending motion. Vi kan därför använda oss av de allmänna uttrycken $\sum_{i=x,y} F_i = 0$ och $\sum M_o = 0$ för våra beräkningar.

Lösning:
- Vi kan direkt bestämma kraften P som ska ge ett vridmoment på 20 Nm kring bulten, eftersom vi känner till hävarmen 120 mm. För system där kraft och hävarm är ortogonala beräknas vridmomentet enligt $M_o = r \cdot F$ (annars $\mathbb{M} = \mathbb{r} \times \mathbb{F}$).

$$M_o = r \cdot P \Rightarrow P = \frac{M_o}{r} = \frac{20}{0{,}120} = \underline{167 \text{ N}}$$

- För att bestämma krafterna i A, B studerar vi muttern:



F_A och F_B är krafterna som verkar på skiftnyckeln.

Bestäm s: $\tan 60° = \frac{7\text{mm}}{s}$

$$\Rightarrow s = \frac{7}{\tan 60°} \text{ mm} = \frac{7}{\sqrt{3}} \text{ mm}$$

För skiftnyckeln gäller: $\sum F_y = 0$ (1) och $\sum M_o = 0$ (2)

$$(1) \Rightarrow F_B \cdot s + F_A \cdot s - 20 \text{ Nm} = 0$$

$$(2) \Rightarrow F_B - F_A - P = 0 \Rightarrow F_B = F_A + P \quad \text{sätts in i (1)}$$

$$\Rightarrow (F_A + P) \cdot s + F_A \cdot s = 20 \text{ Nm}$$

$$\Rightarrow F_A \cdot 2s = 20 - P \cdot s \Rightarrow F_A = \frac{20 - P \cdot s}{2s} =$$

$$= \frac{20 - 167 \cdot \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot 10^{-3}}{2 \cdot \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot 10^{-3}} = \underline{2391 \text{ N}}$$

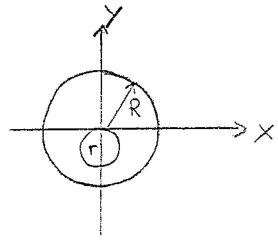
$$(2) \Rightarrow F_B = F_A + P = 2391 + 167 = \underline{2557 \text{ N}}$$

2. Sökt: ▸ Masscentrum för den uniforma (konstant tjocklek) disken med ett hål i

Plan: Använder $\mathbb{R} = \frac{\sum \mathbf{r}_i \cdot m_i}{\sum m_i} = \{\text{Uniform}\} = \frac{\sum \mathbf{r}_i \cdot A_i}{\sum A_i}$, men hur gör vi med hålet? Om vi först beräknar $\mathbf{r} \cdot A$ för en motsvarande hel disk, kan vi sedan subtrahera $\mathbf{r} \cdot A$ för hålet, och sedan dela med kroppens area. Dvs har vi ett hål i en enkel figur, blir det bara ett minustecken (när vi summerar delarna) istället för plustecken.

Lösning:

▸ Sätt origo i centrum av den stora cirkeln:



Symmetri runt y-axeln ("spegelbild")

$\Rightarrow \bar{x} = 0$

▸ Bestäm masscentrums y-koordinat $\bar{y}$.

1: Stor disk: $y_1 = 0$, $A_1 = \pi R^2$

2: Liten disk: $y_2 = -r$, $A_2 = \pi r^2$

▸ $$\bar{y} = \frac{\sum y_i \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{r_1 A_1 - r_2 A_2}{A_1 - A_2} = \frac{0 \cdot \pi R^2 - (-r) \cdot \pi r^2}{\pi R^2 - \pi r^2} =$$

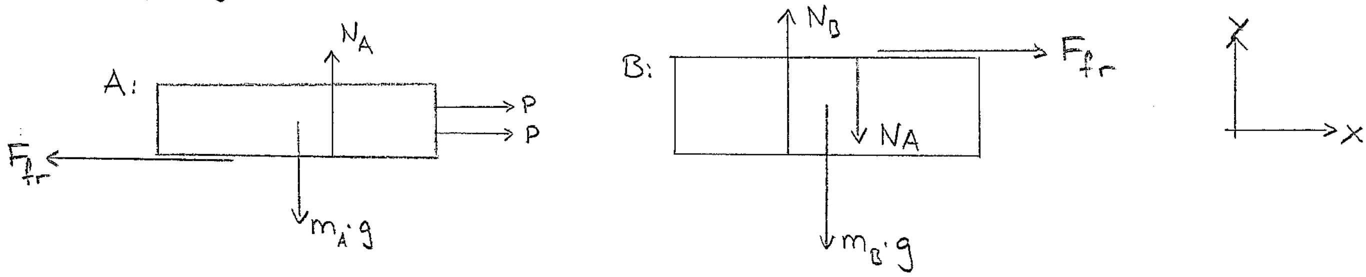
$$= \frac{\pi r^3}{\pi (R^2 - r^2)} = \frac{r^3}{R^2 - r^2}$$

3 Sökt: ▶ Accelerationen av vagn B, när $P = 65\ N$

Plan: ▶ Vi vet inte om vagnarna glider mot varandra eller rör sig som en enhet. När vi undersökt det kan vi beräkna accelerationen av vagn B.

Lösning: $m_A = 20\ kg$, $m_B = 100\ kg$, $\mu = 0.5$

▶ Friläggning av vagnarna:



▶ Beräkna maximala friktionskraften, $F_{fr,max}$, mellan vagnarna:

$$F_{fr,max} = \mu \cdot N_A = \left\{ \begin{array}{l} \sum F_y = 0 \\ \Rightarrow m_A g = N_A \end{array} \right\} = \mu \cdot m_A g = 0{,}5 \cdot 20 \cdot 9{,}82 = 98{,}2\ N$$

Accelererande kraft på B: $P + P = 130\ N > F_{fr,max}$

$\therefore$ Vagn A glider på vagn B.

▶ På B verkar alltså den maximala friktionskraften, $F_{fr} = F_{fr,max}$, och för B gäller

$$\sum F_x = m_B \cdot a_B = F_{fr}$$

$$\Rightarrow a_B = \frac{F_{fr}}{m_B} = \frac{98{,}2}{100} = \underline{0{,}982\ m/s^2}$$

4. Sökt: ▸ Minsta hastighet v för att klossen ska träffa taket.

Plan: ▸ Två kroppar kolliderar och fastnar i varandra ⇒ Rörelsemängden bevaras!

Lösning: $+ \longleftarrow$

▸ Före kollision: $P_f = M \cdot 0 + mv = mv$

▸ Efter kollision: $P_e = (M+m)\, v_e$

$$\Rightarrow \quad v_e = \frac{P_e}{M+m} = \frac{mv}{M+m} \qquad (1)$$

▸ Hur stor hastighet behövs för att klossen ska träffa taket?

Energiomvandling: [Rörelseenergi] ⟶ [Lägesenergi]

$$\frac{\cancel{(m+M)}\, v_e^2}{2} = \cancel{(m+M)}\, g\, l \quad \Rightarrow \quad v_e = \sqrt{2gl} \qquad (2)$$

▸ Kombinera de två uttrycken för v_e (fart direkt efter träff)

$$\Rightarrow \quad v_e = \frac{mv}{M+m} = \sqrt{2gl}$$. Lös ut kulans hastighet v.

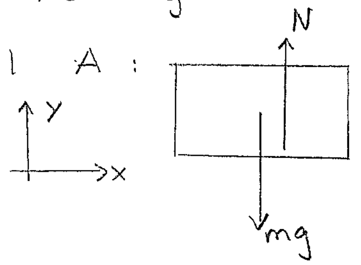
$$\Rightarrow \quad v_e = \frac{M+m}{mv}\sqrt{2gl}$$

4 Sökt: ▶ Högsta höjd isbiten kan släppas från utan att den tappar bankontakt i A.

Plan: ▶ I A rör sig isbiten i en cirkulär bana med radie ρ. Det innebär att kraftresultanten i A är en centripetalkraft. Genom en kraftbalans i A kan vi bestämma den maximala hastigheten i A, och därefter bestämma h.

Lösning:

▶ I A:



När isbiten tappar markkontakt är N=0, undersöker gränsfallet:

$$\sum F_y = \underbrace{\cancel{N}}_{=0} - mg = \frac{-mv^2}{\rho}$$

(Centripetalkraften är riktad mot cirkelns mittpunkt)

Detta ger $v = \sqrt{\rho g}$ (1)

▶ Energiomvandling: [Lägesenergi] → [Rörelseenergi]

$$\Rightarrow \cancel{m}gh = \frac{\cancel{m}v^2}{2} \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g}$$

Sätt nu in (1), som är "gränsfalls-hastigheten"

$$\Rightarrow h = \frac{(\sqrt{\rho g})^2}{2g} = \frac{\rho g}{2g} = \frac{\rho}{2}$$

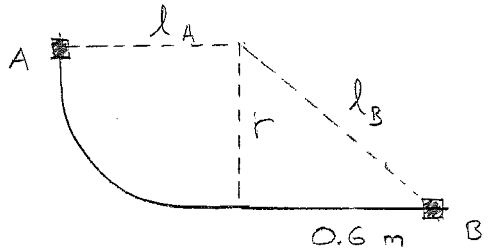
6. Sökt: ▸ Hylsans hastighet i B

Plan: ▸ Typisk energiprincips-uppgift, dvs vi kan utnyttja att energin bevaras.

Lösning:

▸ Energiomvandling: Lägesenergi + Potentiell fjäderenergi.
$\Rightarrow$ Rörelseenergi + Potentiell fjäderenergi.

▸ Skiss:



$m = 3\,kg$
$k = 180\,N/m$
$l_0 = 0{,}4\,m$
$r = 0{,}8\,m$

▸ Energiform(l)er: $E_p = mgh$, $E_k = \frac{mv^2}{2}$, $E_{fj} = \frac{k(l - l_0)^2}{2}$ Vilolängd

Punkt A: $E_A = mgr + \frac{k}{2}(l_A - l_0)^2 =$

$= 3 \cdot 9{,}82 \cdot 0{,}8 + \frac{180}{2}(0{,}8 - 0{,}4)^2 = 38{,}0\,J$

Punkt B: $E_B = E_k + \frac{k}{2}(l_B - l_0)^2 =$

$= E_k + \frac{180}{2}\left(\sqrt{0{,}6^2 + 0{,}8^2} - 0{,}4\right)^2 = E_k + 32{,}4\,J$

▸ Energin bevaras $\Rightarrow E_A = E_B$

$\Rightarrow 38{,}0 = E_k = 32{,}4$

$\Rightarrow E_k = 5{,}6\,J = \frac{m v_B^2}{2}$

$\Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2}{m} 5{,}6} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot 5{,}6} = \underline{1{,}93\,m/s}$